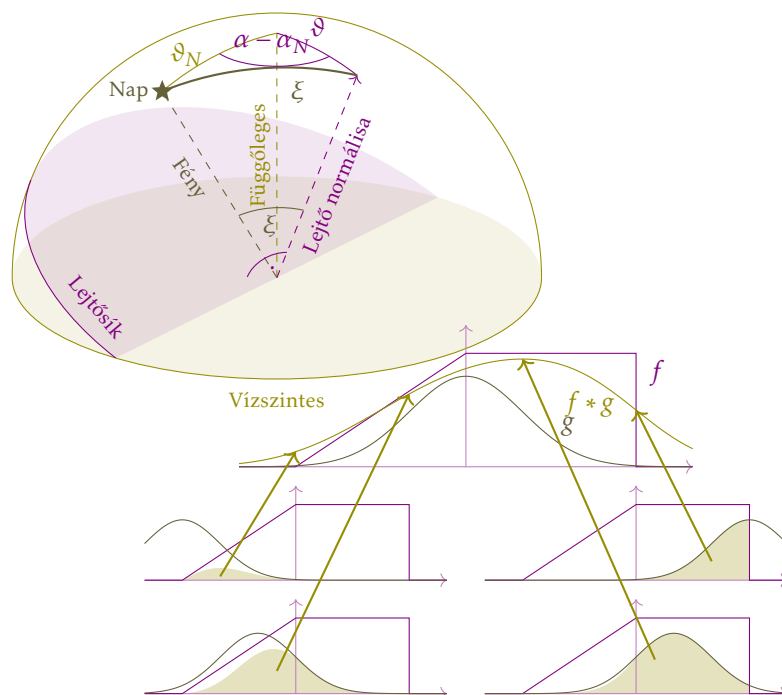


# Trigonometriai, statisztikai és képszűrési alapok

Jegyzet a Matematika a térképészetben előadáshoz



5

Készült 2025-ben  
Előzetes változat  
Budapest, 2025.



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
INFORMATIKAI KAR  
TÉRKÉPTUDOMÁNYI ÉS GEOINFORMATIKAI INTÉZET

*Ez a jegyzet non-profit oktatási és kutatási célokra szabadon felhasználható és terjeszthető az eredeti szerző és esetleges módosítás esetén azok egyértelmű megjelölése mellett. Minden más célú, különösen az anyagi haszonszerzéssel járó felhasználás csak a szerző előzetes írásbeli engedélyével lehetséges.*

## A jegyzetről

Ez a jegyzet A Földtudomány BSc-n bevezetett Matematika a térképészetben című tárgy előadásainak kivonatát tartalmazza. Az egyes előadások anyagát egy-egy oldalon lehet áttekinteni.

A tantárgy célja a hallgatók középiskolában szerzett matematikai ismereteit föleleveníteni és elmélyíteni, hogy a későbbi kurzusokon a hallgatók már rutinszerűen ismerjék a szükséges fogalmakat, összefüggéseket.

A tananyag három ismeretkört fejt ki négy-négy előadásban, melyek egymáshoz csak lazán kapcsolódnak. Az első részben trigonometriai, koordináta-geometriai és vektorszámítással kapcsolatos ismeretekre teszünk szert.

Ennek célja, hogy a felméréstani, vetülettani és domborzattani témában meghirdetett kurzusokon a hallgatók felkészülten vehessenek részt.

A jegyzet második nagy ismeretkörében a kartográfia szükséges statisztikai eszközkészletéből kapunk kóstolót. Ennek a résznek a célja elsősorban a tematikus kartográfiában oktatott statisztikai módszerek elméleti megalapozása.

Az utolsó nagy egységben a képfeldolgozás mögött álló matematikai összefüggésekre derül fény. Ezek elsődlegesen a fotogrammetria és távérzékelés területén hallgatott tárgyaknál lesznek hasznosak.

# Tartalomjegyzék

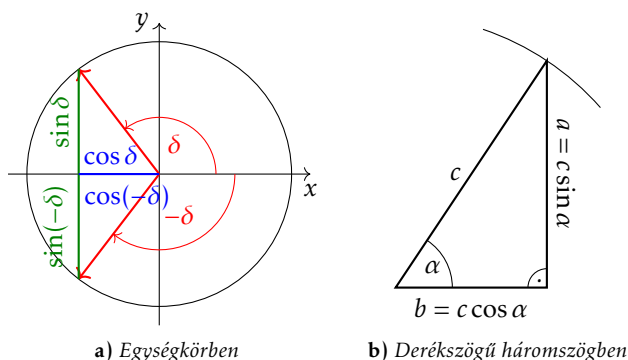
|                                                       |           |                                      |           |
|-------------------------------------------------------|-----------|--------------------------------------|-----------|
| <b>A jegyzetről</b>                                   | <b>2</b>  | <b>VI.4. Paraméterbecslés</b>        | <b>15</b> |
| <b>I. Síkháromszögtan</b>                             | <b>4</b>  | <b>VII. Osztályozás</b>              | <b>16</b> |
| I.1. Szögfüggvények                                   | 4         | VII.1. Hisztogram.                   | 16        |
| I.2. Nevezetes összefüggések                          | 4         | VII.2. Egyváltozós osztályozás       | 16        |
| I.3. Szinusz- és koszinusztétel                       | 5         | VII.3. Többváltozós osztályozás      | 17        |
| I.4. Trigonometrikus egyenletek                       | 5         | <b>VIII. Matematikai statisztika</b> | <b>18</b> |
| <b>II. Számítások vektorokkal</b>                     | <b>6</b>  | VIII.1. Statisztikai próbák          | 18        |
| II.1. Derékszögű koordináták                          | 6         | VIII.2. Korreláció                   | 19        |
| II.2. Műveletek vektorokkal és mátrixokkal            | 6         | <b>IX. Függvények spektruma</b>      | <b>20</b> |
| II.3. Vektorok hossza és hajlásszöge                  | 6         | IX.1. FOURIER-sor                    | 20        |
| II.4. Polárkoordináták                                | 7         | IX.2. FOURIER-transzformáció         | 20        |
| <b>III. Lineáris algebra</b>                          | <b>8</b>  | IX.3. Képszűrések                    | 21        |
| III.1. A determináns                                  | 8         | <b>X. Konvolúciós szűrők</b>         | <b>22</b> |
| III.2. Lineáris egyenletrendszerek                    | 8         | X.1. Konvolúció                      | 22        |
| <b>IV. Trigonometria alkalmazása a térképészetben</b> | <b>10</b> | X.2. Simító szűrők                   | 22        |
| IV.1. Pont koordinátáinak meghatározása               | 10        | X.3. Élkiemelő szűrők                | 23        |
| IV.2. Lejtőszög és kitettség                          | 11        | <b>XI. Éldetektálás</b>              | <b>24</b> |
| IV.3. Domborzatárnyékolás                             | 11        | XI.1. Élmegőrző szűrők               | 24        |
| <b>V. A valószínűségszámítás alapvető fogalmai</b>    | <b>12</b> | XI.2. Élkereső szűrők                | 24        |
| V.1. Valószínűségi mező és változó                    | 12        | XI.3. Gyakori szűrők kerneljei       | 25        |
| V.2. Az eloszlás                                      | 12        | <b>XII. Digitális mintavételezés</b> | <b>26</b> |
| V.3. Mérési skálák                                    | 12        | XII.1. A DIRAC-delta                 | 26        |
| V.4. Számunkra érdekes eloszlások                     | 13        | XII.2. Mintavételi tétel             | 26        |
| <b>VI. Leíró statisztika</b>                          | <b>14</b> | XII.3. Zárshó.                       | 27        |
| VI.1. Középértékek                                    | 14        | <b>Függelékek</b>                    | <b>28</b> |
| VI.2. Diszperzitás                                    | 14        | A. Szóbeli vizsga tételsora          | 28        |
| VI.3. Kvantilisok                                     | 15        |                                      |           |

# Első előadás

## Síkháromszögtan

### I.1. Szögfüggvények

Vegyünk egy egységsugarú kört az origóban, és egy  $\delta$  szöget, amelynek egyik szára az  $x$  tengely pozitív fele, és amelyet az  $y$  tengely pozitív felének irányában tekintünk pozitívnak! A másik szögcsúsz és a kör metszéspontjának  $y$  koordinátáját  $\delta$  szinuszának,  $x$  koordinátáját koszinuszának nevezzük (I.1. ábra).



a) Egységsírkörben

b) Derékszögű háromszögben

I.1. ábra. Szögfüggvények

Az ábráról leolvasható, hogy a szinuszt páratlan, a koszinuszt pedig páros függvény (hiszen  $\delta$ -t az  $x$  tengelyre tükrözve csak az  $y$  koordináta vált előjelet):

$$\sin(-\delta) = -\sin \delta \quad \cos(-\delta) = \cos \delta$$

A szögfüggvényeket leggyakrabban derékszögű háromszögek szögeire alkalmazzuk. Ha egy egységsírkörbe rajzolt derékszögű háromszöget  $c$ -szeresre nagyítunk, akkor a b) ábrarészen látható derékszögű háromszögre  $\sin \alpha = a/c$ ;  $\cos \alpha = b/c$ . Időnként használjuk még a  $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha = a/b$  és  $\cot \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha = b/a$  szögfüggvényeket is.

Előfordul, hogy magát a szöget nem ismerjük, csak valamelyik szögfüggvényének értékét. Ilyenkor a szögfüggvények inverzeit használjuk; jelük rendre  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctan x$  és  $\operatorname{arccot} x$ .

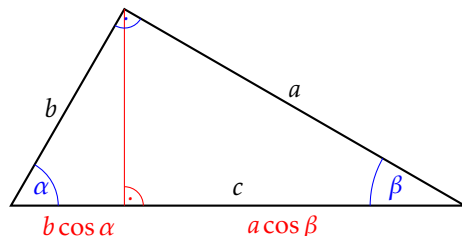
### I.2. Nevezetes összefüggések

Az I.2. ábrán lévő háromszöget tekintve az előbb megismert szögfüggvényeket így számíthatjuk ki:  $\sin \alpha = a/c$ ;  $\cos \beta = a/c$ ;  $\sin \beta = b/c$ ;  $\cos \alpha = b/c$ ;  $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha = a/b$  és  $\cot \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha = b/a$  így:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

\* Itt valójában fölhasználtuk, hogy a síkháromszög belső szögeinek összege  $180^\circ$ . Ez viszont csak az euklideszi geometriában van így, azaz a fejezetben ismertetett tételek más geometriákban (pl. gömbön) nem érvényesek!



I.2. ábra. A PITAGORASZ-tétel bizonyítása

Továbbá a derékszögű háromszög magassága két kisebb derékszögű háromszögre bontja a háromszöget. A kis háromszögek vízszintes befogóinak összege éppen a nagy háromszög átfogója:

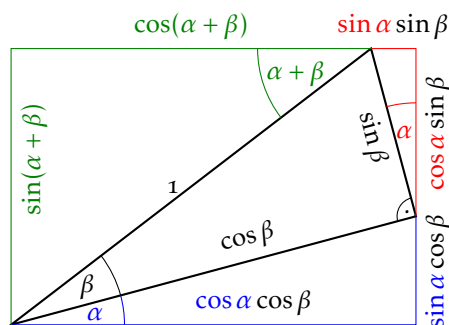
$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha = a \frac{a}{c} + b \frac{b}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Fenti összefüggés a PITAGORASZ-tétel. Következménye:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Vegyünk egy  $\alpha$  és mellette egy  $\beta$  szöget! Rajzoljunk egy egység átfogójú derékszögű háromszöget a  $\beta$  szög száraitra, majd rajzoljuk meg a derékszögű háromszöget befoglaló téglalapot úgy, hogy annak egyik oldala az  $\alpha$  szög  $\beta$ -val nem érintkező szögcsúszára legyen (I.3. ábra)! Vegyük észre, hogy az  $\alpha + \beta$  váltószöge megjelenik az ábra tetején!



I.3. ábra. Addíciós tételek

Mivel a téglalap szemközti oldalai egyformák:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Következménye:

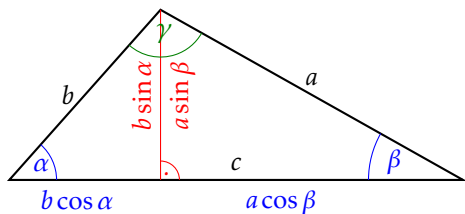
$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Fenti összefüggéseket gyakran alkalmazzuk majd vetületi számítások során, így memorizálásuk elkerülhetetlen a további félévek túléléséhez!

### I.3. Szinusz- és koszinusztétel

Az eddigi számítások kizárólag derékszögű háromszögekre működnek. Szabálytalan háromszögek oldalai és szögei között úgy találhatunk összefüggést, ha azokat egyik magasságukkal felosztjuk két derékszögű háromszögre (I.4. ábra).



I.4. ábra. Szögfüggvények szabálytalan háromszögben

A háromszög magasságát mindkét derékszögű háromszögből levezethetjük:<sup>\*</sup>

$$a \sin \beta = b \sin \alpha$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

Fönti összefüggés a *szinusztétel*. A háromszög két oldala és két szöge között teremt összefüggést.

Ugyanebből az ábrából:<sup>†</sup>

$$c = b \cos \alpha + a \cos \beta$$

$$c^2 = bc \cos \alpha + ac \cos \beta$$

Hasonló gondolatmenettel:

$$a^2 = ac \cos \beta + ab \cos \gamma$$

$$b^2 = bc \cos \alpha + ab \cos \gamma$$

Na de akkor viszont:

$$c^2 = a^2 + b^2 + c^2 - a^2 - b^2 = a^2 + b^2 + bc \cos \alpha + ac \cos \beta - ac \cos \beta - ab \cos \gamma - bc \cos \alpha - ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Ez pedig a *koszinusztétel*. Három oldal és egy szög között ad összefüggést. A síkgeometria érdekessége, hogy ha két szöget ismerünk, nincs szükség újabb összefüggésre, hogy a harmadik szöget megadjuk, hiszen a háromszög szögeinek összege síkon  $180^\circ$ . Éppen ezért viszont, ha egy síkháromszögnek csak három szöget ismerjük, akkor valószínűleg csak két független adatunk van, így a háromszög oldalhosszai nem határozhatók meg.

A síkháromszögtani összefüggéseket elsődlegesen az *általános geodéziában* alkalmazzuk: egyrészt lehetőséget adnak arra, hogy a terepen ne kelljen minden szöget és távolságot megmérnünk, hanem már megmért távolságainkból és szögeinkből számítással továbbiakat tudunk levezetni; másfelől ha mégis vannak ún. fölös méréseink, akkor mérési adataink megbízhatóságát tudjuk a képlettel ellenőrizni.

<sup>\*</sup> A levezetés akkor is működik, ha  $\alpha$  vagy  $\beta$  tompaszög, mert a tompaszögek szinusa megegyezik kiegészítő szögük szinuszával.

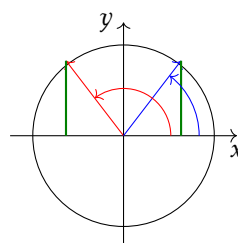
<sup>†</sup> Ha  $\alpha$  vagy  $\beta$  tompaszög, akkor a magasság a háromszögön kívül helyezkedik el, de  $c$  hosszát akkor is összeadással számíthatjuk ki, mert a tompaszögek koszinusa negatív.

### I.4. Trigonometrikus egyenletek

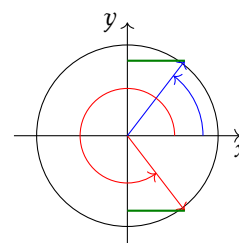
Abban az esetben, amikor előbbi tételeket a háromszög szögeinek meghatározására kívánjuk használni, az ismeretlen szöget nem kapjuk meg közvetlenül, csak annak valamely szögfüggvényét. Az ismeretlen szög szögfüggvényét tartalmazó egyenlet a *trigonometrikus egyenlet*. A térképészeti gyakorlatban más szögek, pl. irányok (azimut), szélesség és hosszúság szögfüggvényei is gyakran előfordulhatnak az egyenletekben.

A trigonometrikus egyenleteknek jellemzően több megoldása van (I.5. ábra):

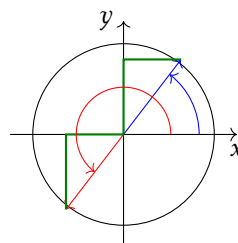
- A  $\sin x = y$  alakú egyenletnek ha  $x = \delta$  megoldása, akkor megoldása még  $x = 180^\circ - \delta$  is.
- A  $\cos x = y$  alakú egyenletnek ha  $x = \delta$  megoldása, akkor megoldása még  $x = 360^\circ - \delta$  is.
- A  $\tan x = y$  alakú egyenletnek ha  $x = \delta$  megoldása, akkor megoldása még  $x = 180^\circ + \delta$  is.
- Mindhárom fenti egyenlet típusnak ha  $x = \delta$  megoldása, akkor megoldása még  $x = \delta \pm k360^\circ$  is, ahol  $k \in \mathbb{Z}$ , azaz végső soron végtelen sok megoldást kaptunk.



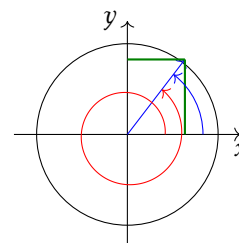
a)  $\sin \delta = \sin(180^\circ - \delta)$



b)  $\cos \delta = \cos(360^\circ - \delta)$



c)  $\tan \delta = \tan(180^\circ + \delta)$



d) Forgatás  $360^\circ$ -kal

I.5. ábra. Trigonometrikus egyenletek további megoldásai

A végtelen sok megoldás közül jellemzően csak egy (ritkán két) olyan megoldás van, amely az eredeti kartográfiai vagy felméréstani problémának is megoldása, hiszen

- háromszög belső szöge mindig  $0^\circ$  és  $180^\circ$  közé,
- azimut (irány) mindig  $0^\circ$  és  $360^\circ$  közé,
- szélességi koordináta mindig  $\pm 90^\circ$  közé,
- hosszúsági koordináta pedig mindig  $\pm 180^\circ$  közé esik.

Ha fenti elvárásainknak két megoldás is megfelel, fokozott óvatossággal kell eljárunk! Lehet, hogy a két gyök közül az egyik hamis. Ilyenkor a rossz megoldást gyakran ki lehet szűrni józan ésszel vagy a problémát másik szögfüggvény segítségével (pl. szinusz- és koszinusztétellel is) megoldva: ha a két egyenletnek csak az egyik megoldása közös, a másik megoldás kiszűrhető. Olyan is előfordulhat, hogy valóban helyes mindkét megoldás.

A  $\sin x = y$  és  $\cos x = y$  alakú egyenleteknek nincs megoldása, ha  $|y| > 1$ . A térképészeti gyakorlatban ilyen azonban csak mérési vagy számítási hiba esetén fordulhat elő.

## Második előadás

# Számítások vektorokkal

### II.1. Derékszögű koordináták

A középiskolából ismert *derékszögű koordináta-rendszer* egy origóhoz képest két, egymásra merőleges bázisvektor lineáris kombinációjával adja meg a pont helyzetét. A két koordináta-tengelyt jellemzően az  $x$  és  $y$  betűkkel szoktuk jelölni, azonban  $x$  és  $y$  a geodéziai gyakorlatban nem mindig a matematikában megszokott irányokba mutat. Derékszögű koordináta-rendszer a síkbeli esethez hasonló módon térben is definiálható.

### II.2. Műveletek vektorokkal és mátrixokkal

A valós számokból álló számpárt, -hármast stb. szokás *vektornak* is nevezni. A vektorok ebben a jegyzetben hol sorvektorként  $(x; y)$ , hol oszlopvektorként  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  lesznek jelölve, a két jelölés egymással fölcserélhető, szorzásnál praktikus konvenció a sor-oszlop sorrend használata. A vektorok megfeleltethetők például a megfelelő dimenziójú derékszögű koordináta-rendszerekben értelmezett pontok koordinátáinak.

Középiskolából ismert, hogy két vektor összeadása és kivonása egyszerűen elvégezhető a tagok összevonásával:

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a \pm x_b \\ y_a \pm y_b \\ z_a \pm z_b \end{pmatrix}$$

Szintén ismert, hogy két vektor *skaláris szorzata* megkapható a vektorok koordinátáinak szorzatösszegeként:

$$(x_a; y_a; z_a) \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

Az előbbi példánál jelentősége van annak, hogy az első vektort sorvektorként, a másodikat oszlopvektorként jelöltem. Ha a két tényezőt fölcserélem, akkor a két vektor *diadikus szorzatáról* beszélek, melynek kiszámítását a következőképp végezzük ezúttal kétdimenziós vektorokkal:

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} (x_b; y_b) = \begin{pmatrix} x_a x_b & x_a y_b \\ y_a x_b & y_a y_b \end{pmatrix}$$

Amelyet szemléletesen következőképp jelölhetünk:

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b & y_b \\ x_a x_b & x_a y_b \\ y_a x_b & y_a y_b \end{pmatrix}$$

Látszik, hogy egy új képződményt kaptunk, amely sem nem vektor, sem nem skalár, hanem valamilyen új állatfajta, egy számokból álló táblázat, amelynek elemei az

eredeti vektorok koordinátái szorzótáblaszerűen össze-szorozva. Az új képződményt, azaz a valós számokból fölépített táblázatot *mátrixnak* nevezzük.

A matematikai műveletek mátrixokra is értelmezhetők. Legegyszerűbb az összeadás. A vektorokhoz hasonlóan kizárólag azonos méretű mátrixok adhatók össze:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

Mátrixot mátrixszal szorozni a vektorok szorzásához hasonlóan lehet: most az első mátrix adott sorában és a második adott oszlopában elhelyezkedő vektorokat kell páronként skalárisan összeszorozni, azaz elemeik szorzatát összegezni. Az előző két mátrix szorzata tehát a korábban bemutatott jelöléssel:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

A mátrixok szorzásának fontos tulajdonsága, hogy a tényezők nem cserélhetők föl egymással, különben eltérő eredményt kapunk:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+cf & be+df \\ ag+ch & bg+dh \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

Szintén megemlíteném, hogy a mátrixok szorzását csak akkor tudjuk értelmezni, ha a jobb mátrixnak annyi sora van, ahány oszlopból áll a bal mátrix. Mátrixot vektorral is szorozhatunk, amelynek módja már nem meglepő:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

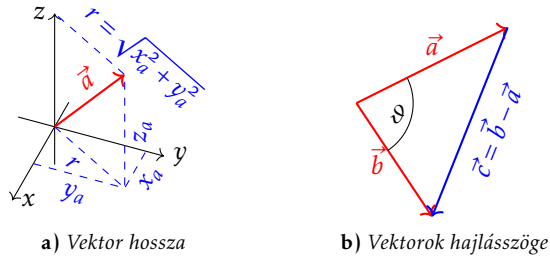
Azaz ha mátrixot vektorral szorzunk, az eredmény egy vektor lesz.

### II.3. Vektorok hossza és hajlásszöge

A vektorok hosszát abszolútérték-jellel jelöljük. Számítása a PITAGORASZ-tétel többszöri alkalmazásával lehetséges (II.1. ábra):

$$|\vec{a}|^2 = r^2 + z_a^2 = x_a^2 + y_a^2 + z_a^2$$

Vegyük észre, hogy  $|\vec{a}|^2 = \vec{a}\vec{a} = \vec{a}^2$ , azaz a vektor hosszának négyzete megegyezik az önmagával vett skaláris szorzattal.



II.1. ábra. Vektor hossza és hajlásszöge

Két vektor  $\vartheta$  hajlásszögét a skaláris szorzatukból számíthatjuk. Egyfelől az ábra szerint:<sup>\*</sup>

$$\vec{c}^2 = (\vec{b} - \vec{a})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\vec{b}$$

Másfelől a koszinusztételből:

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\vec{b} = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\vartheta$$

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\vartheta$$

$$\cos\vartheta = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

A levezetés középső egyenlete egyúttal egy alternatív képlet a skaláris szorzat kiszámítására.

## II.4. Polárkoordináták

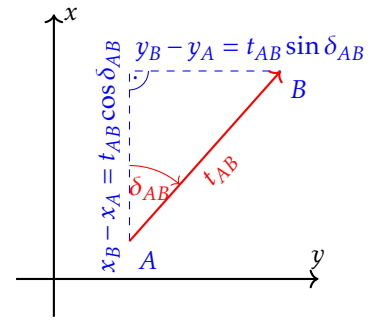
Egy másik gyakran alkalmazott koordináta-rendszer a *polárkoordináta-rendszer*. Ez is két számmal adja meg a pontok helyzetét. Az első, a *polártávolság* mutatja meg, hogy a pont milyen messze van az origótól, míg a második, a *polárszög* valamilyen kezdőiránnyal bezárt szöget jelöl.

A derékszögű és polárkoordináták között nincs mindenható átszámítási képlet! Érdekes mindig fölrajzolni a koordinátákat, és ennek megfelelően szögfüggvényekkel kitalálni az aktuálisan érvényes képleteket (II.2. ábra).

A derékszögűből polárkoordinátába történő átszámítást II. vagy *inverz*, a polárból derékszögűbe történő átszámítást I. vagy *direkt geodéziai főfeladat*nak nevezzük. A geodéziai alapfeladatok képletei északkeleti tájékozású rendszerben (a távolságot most  $t$ , az azimutot  $\delta$  jelöli):

$$\begin{aligned}x_B &= x_A + t_{AB} \cos \delta_{AB} \\y_B &= y_A + t_{AB} \sin \delta_{AB} \\t_{AB} &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\tg \delta_{AB} &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\end{aligned}$$

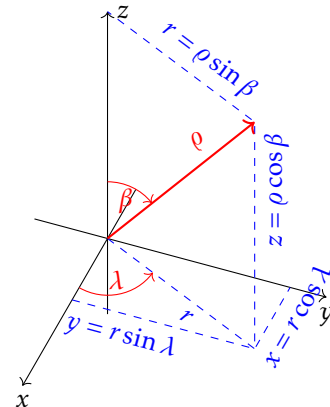
<sup>\*</sup> Itt igazából fölhasználtuk, hogy a skaláris szorzat disztributív. Ennek bizonyítása a definícióból mechanikus, de hosszadalmas.



II.2. ábra. Geodéziai alapfeladatok síkon

Az azimutra két megoldásunk van, mert a tangens periódusa  $180^\circ$ . Azimutszámítás esetén ökölszabály: ha a jobboldali tört nevezője negatív, a számológépből kijött eredményhez adjunk  $180^\circ$ -ot, ha pozitív, akkor semmit vagy  $360^\circ$ -ot. Ez az ökölszabály csak azimutszámításnál működik!

Polárkoordináták megadására a térben is lehetőség van. Ha a kezdőpontot az origóban vesszük föl, amint az a II.3. ábrán látszik, a  $\rho$  *polártávolság* és a  $z$  tengely pozitív felétől mért  $\beta$  *pólustávolság* mellett szükség van a  $\lambda$  *azimutszög*re is. Ez a szög két, a  $z$  tengely által határolt félsík között mérendő, amelyek közül az egyik az  $x$  tengely pozitív felét, a másik pedig a pontot tartalmazza.



II.3. ábra. Térbeli polárkoordináta-rendszer

Az átszámítási képletek az ábrán jól leolvashatók:

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \beta \cos \lambda \\y &= \rho \sin \beta \sin \lambda \\z &= \rho \cos \beta \\\rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\\beta &= \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\\lambda &= \arctg \frac{y}{x}\end{aligned}$$

# Harmadik előadás

## Lineáris algebra

### III.1. A determináns

A későbbiekben többször szükségünk lesz a determináns fogalmának ismeretére. Azokhoz a mátrixokhoz, amelyeknek ugyanannyi sora van, mint oszlopa, hozzárendelhetünk egy *determinánsnak* nevezett számot, amelyet a következő módon számíthatunk ki:

1. Készítsünk egy sakktáblát előjelekből: A bal felső sarokban lévő előjel +, a többi sakktáblaszerűen váltakozva – és +. A sakktábla mérete egyezzen meg a determináns méretével!
2. Válasszuk ki a determináns egy tetszőleges sorát vagy oszlopát!
3. A sor vagy oszlop elemein végighaladva képezzük a következő három tényező szorzatát: a sakktáblában az adott elemhez tartozó előjel; maga az adott elem; az adott elem sorát és oszlopát letakarva képzett determináns.
4. Az előző pontban megadott szorzatok összege egyenlő a determináns értékével, függetlenül a választott sortól vagy oszloptól. Mindig elég egyetlen soron vagy oszlopon végighaladni.

Példaként számítsunk ki egy  $3 \times 3$ -as determinánst az első sora szerint kifejtve, majd a kapott  $2 \times 2$ -es determinánsokat szintén az első soraik szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = \\ = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

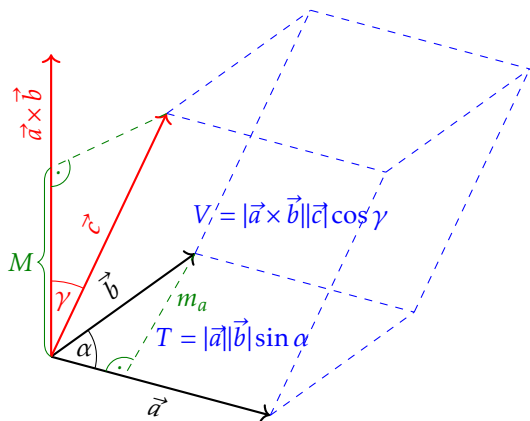
A determináns geometriai jelentése a terület és a térfogat fogalmához kapcsolódik. Az origóból induló  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  vektorok által kifeszített paralelogramma területe például megegyezik az alap és a magasság szorzatával. Azonban a paralelogramma  $m_a$  magassága pedig megegyezik a  $b$  oldal hosszának és az  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  vektorok által bezárt  $\alpha$  szög szinuszával szorzatával (III.1. ábra).

Definiáljuk az  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  vektorok *vektoriális szorzatát*:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \left( \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \right)$$

Igazából a középső definíció szigorúan véve értelmetlen, csak a memorizálást segíti. Vegyük észre, hogy ha viszont ezt a vektort egy harmadik vektorral skalárisan szorozzuk, a harmadik vektor koordinátái bekerülnek a determinánsba. Ezek szerint (a determinánst az első sora szerint kifejtve):

$$\vec{a}(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = x_a \cdot 0 - y_a \cdot 0 + z_a \cdot 0 = 0$$



III.1. ábra. A paralelepipedon térfogatának számítása

Azaz  $\vec{a} \times \vec{b}$  és  $\vec{a}$  merőleges egymásra. Hasonlóan látható be  $\vec{a} \times \vec{b}$  és  $\vec{b}$  merőlegessége. A szorzat hossza:

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (y_a z_b - z_a y_b)^2 + (x_a z_b - z_a x_b)^2 + (x_a y_b - y_a x_b)^2 = \\ &= (x_a^2 + y_a^2 + z_a^2)(x_b^2 + y_b^2 + z_b^2) - (x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b)^2 = \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \alpha = \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \alpha) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

Azaz  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$ , vagyis éppen a paralelogramma területe. A levezetés másodig egyenlősége nehezen látható be. Segítség, ha megfigyeljük, hogy a második sorban a zárójeleket kifejtve  $x_a^2 x_b^2$ ,  $y_a^2 y_b^2$  és  $z_a^2 z_b^2$  kiesnek, csak a kétszeres szorzatok maradnak meg. Ezek viszont megegyeznek az első sor kifejtéséből adódó kétszeres szorzatokkal.

Vegyünk most a térben egy harmadik  $\vec{c}$  vektort, és keressük meg az  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát! A ferde hasábok térfogata megegyezik az alapterület és a magasság szorzatával. Az alapterület az  $\vec{a} \times \vec{b}$  hossza, az  $M$  magasság pedig megegyezik  $\vec{c}$  hosszának, valamint az  $\vec{a} \times \vec{b}$  és  $\vec{c}$  között mért  $\gamma$  szög koszinuszának szorzatával (III.1. ábra). Ez pedig együttesen nem más, mint  $\vec{a} \times \vec{b}$  és  $\vec{c}$  skaláris szorzata. A paralelepipedon térfogatát kiadó vegyes szorzást a három vektor *triadikus szorzatának* nevezzük:

$$V = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \gamma = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

### III.2. Lineáris egyenletrendszerek

Egy anya huszonegy évvel idősebb, mint a gyermeke. Hat év múlva az anya ötször olyan idős lesz, mint a gyermek. Hol a gyermek apja?

Az ilyen típusú feladatokat több egyenlet együttesével tudjuk megoldani. A gyermek életkorát  $g$ -vel, az anyáét  $a$ -val jelölve:

$$\begin{aligned} a &= g + 21 \\ a + 6 &= 5(g + 6) \end{aligned}$$

Lineáris egyenletrendszernek nevezzük azokat a többszörös egyenletrendszereket, amelyekben csak összeadás-kivonás és az ismeretlenek konstánssal való szorzása szerepel. Nézzük meg például a következő egyenletrendszert, ahol  $x$  és  $y$  az ismeretlenek:

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

Vegyünk észre néhány dolgot! Először is azt, hogy az egyenletrendszer a mátrixok szorzásáról tanultak (II.2. fejezet) alapján így is fölírható:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

A bal oldalon található mátrix neve *együtthatómátrix*, a jobb oldali vektor a *szabadvektor*. A megoldáshoz írjuk át erre az alakra:

$$x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

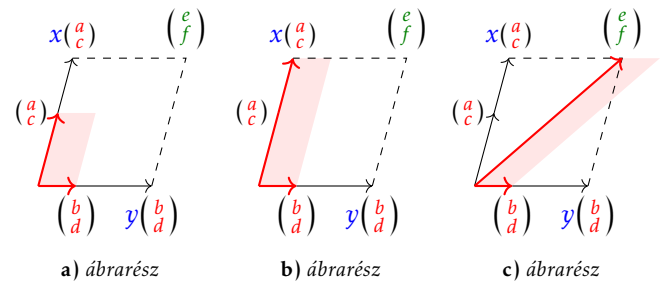
A piros oszlopvektorok által kifeszített paralelogramma (III.2. ábra a) része) területe ( $n > 2$  ismeretlen esetén az  $n$  dimenziójú paralelepipedon térfogata) éppen az együtthatómátrix  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  determinánsa, melyet *fődetermináns*nak nevezünk. Ha az első élvektort beszorozzuk  $x$ -szel, a terület (térfogat) értelemszerűen  $x$ -szeresére változik (lásd b) ábrarész). A paralelogramma területe (paralelepipedon térfogata) nem változik, ha az alapot és magasságát nem változtatjuk, tehát az alapokat egymáshoz képest párhuzamosan elcsúszthatom, azaz az alap vektorainak bármilyen skalárszorosát hozzáadhatom a magasságot kifeszítő vektorhoz (lásd c) ábrarész). Csúsztassuk el úgy, hogy az első oszlopvektor éppen a szabadvektorba mutasson! Ekkor a paralelogramma területe:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} xa + yb & b \\ xc + yd & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xa & b \\ xc & d \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ x &= \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

Hasonló elven az  $y$  ismeretlen is megkapható, ha a fődetermináns második oszlopvektorát szorozom be  $y$ -nal, és ezt a vektort tolom el párhuzamosan a szabadvektorba. A levezetést mellőzve:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

\* Az eredeti kérdésre a választ  $g$  megoldása adja.



III.2. ábra. Lineáris egyenletrendszer megoldása geometriai úton. A b) és c) ábrarészen látható paralelogrammák területe egyenlő, éppen az a) részen látható  $x$ -szerese.

Nézzük meg újra a kapott megoldásokat! Mindkét megoldás nevezőjében a fődetermináns áll. Az egyenletrendszernek akkor és csak akkor van egyértelmű megoldása, ha a fődetermináns nem nulla (ekkor nem kell nullával osztani). Ha a fődetermináns nulla, akkor az egyenletrendszernek vagy nincs megoldása, vagy végtelen sok megoldása van.

Vigyázz szemünk a számlálókra vessük! Egyetlen oszlop kivételével ezek a determinánsok is megegyeznek a fődeterminánssal. Az az oszlop változott meg, amelyik az épp kérdéses ismeretlen együtthatóit tartalmazta, ide az egyenlet jobb oldalán álló *szabadvektor* tagjai kerültek. Bebizonyítható, hogy ez az elv akárhány ismeretlenes lineáris egyenletrendszerre működik, ha pontosan ugyanannyi egyenletünk van, ahány ismeretlenünk. Ennek belátása bár csak a négy alapműveletet igényli, igen hosszadalmas, ezért eltekintünk tőle. Ezt a megoldóképletet *CRAMER-szabálynak* nevezzük, és kevés ismeretlenből álló egyenletrendszer megoldására használható.<sup>†</sup>

Vegyük a következő  $n$  ismeretlenes lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Akkor  $x_i$  ismeretlen megoldása CRAMER-szabállyal:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

A lineáris egyenletrendszerek a kartográfia számtalan területén vissza fognak köszönni, így a CRAMER-szabályt érdemes jól megjegyezni!

<sup>†</sup> Sok ismeretlen esetén egy másik megoldóképlet, a GAUSS-JORDAN-elimináció sokkal hatékonyabb.

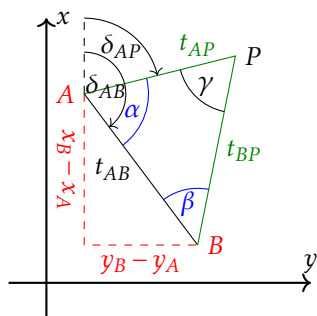
## Negyedik előadás

# Trigonometria alkalmazása a térképészetben

### IV.1. Pont koordinátáinak meghatározása

A megismert háromszögtani összefüggéseket alkalmazhatjuk felméréstani feladatok megoldására. Mivel a terepen egyszerűbb szöget mérni, mint távolságot, egy  $P$  pont helyzetének meghatározása történhet két ismert pontra szögmérővel (teodolit) fölállva, és a  $P$  pont felé mutató  $\alpha$  és  $\beta$  szögeket mérve. Ez az *előremetszés* (IV.1. ábra).

1. Az  $A$  és  $B$  pont koordinátáiból meghatározzuk a  $\delta_{AB}$  azimutot és a  $t_{AB}$  távolságot (II. geodéziai főfeladat).
2. A mért  $\alpha$  és  $\beta$  szögekből kiszámítjuk a háromszög harmadik,  $\gamma$  szögét.
3.  $\alpha$  és  $\delta_{AB}$  különbségéből vagy összegéből (attól függően, hogy  $P$  az alapvonal melyik oldalán helyezkedik el) képezzük  $\delta_{AP}$ -t.
4. Szinusztétellel kiszámítjuk a  $t_{AP}$  távolságot a  $\beta$  és  $\gamma$  szögekből, valamint a  $t_{AB}$  távolságból.
5. A  $t_{AP}$  távolságból és  $\delta_{AP}$  azimutból I. geodéziai főfeladattal adódnak  $P$  koordinátái.



IV.1. ábra. Pont koordinátáinak meghatározása. Előremetszés esetén a kék és vörös, ívmetszés esetén a zöld és vörös adatok ismertek, a feketék a két ismert pontból számíthatók.

Ha a  $B$  pontban nem tudunk felállni (pl. gyárkémény teteje), akkor mérhetjük  $\beta$  helyett a  $\gamma$  szöget közvetlenül a  $P$  pontban is. A számítás menete ugyanaz (kivéve, hogy a 2. lépés szükségtelen), de *oldalmetszésnek* nevezzük.

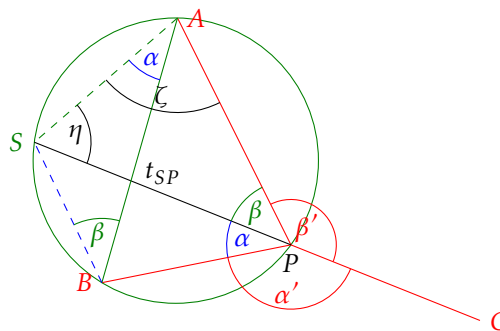
Újabban akár közvetlenül is mérhetjük az ismeretlen pont távolságát a két ismerttől ( $t_{AP}$  és  $t_{BP}$ ) pl. lézerrel. Ez az *ívmetszés*. Előnye, hogy gyorsabb a szögmérésnél, azonban nagyobb távolságok mérése már problémás lehet.

1. Az  $A$  és  $B$  pont koordinátáiból meghatározzuk a  $\delta_{AB}$  azimutot és a  $t_{AB}$  távolságot (II. geodéziai főfeladat).
2. Koszinusztétellel kiszámítjuk az  $\alpha$  szöget a három ismert oldalhosszból.
3.  $\alpha$  és  $\delta_{AB}$  különbsége vagy összege adja  $\delta_{AP}$ -t.
4. A  $t_{AP}$  távolságból és  $\delta_{AP}$  azimutból I. geodéziai főfeladattal adódnak  $P$  koordinátái.

Ha a két ismert pont közül egyikre sem állhatunk föl műszerrel vagy a két ismert pont között nincs összelátás,

akkor az egyetlen lehetőség a *hátrametszés*. Ehhez kell egy harmadik ismert koordinátájú pont ( $C$ ). Fontos, hogy a három ismert és az ismeretlen pont ne essék (közelítőleg sem) ugyanarra a körre! A műszerrel csak az ismeretlen  $P$  pontban állunk föl, és a IV.2. ábrán látható  $\alpha'$  és  $\beta'$  szögeket kell megmérnünk (a három lehetséges szög közül a két legnagyobbat) és a pontokat úgy betűzzük el, hogy  $P$ -ből nézve ha  $C$  a hátunk mögött van, akkor  $A$  jobbra,  $B$  balra legyen:

1. Az  $A$ ,  $B$  és  $P$  pontokon keresztül rajzolunk egy képzeletbeli kört, majd a kör és a  $PC$  egyenes metszéspontjában fölveszünk egy képzeletbeli  $S$  segédpontot.
2. A  $P$  pontnál található  $\alpha$  és  $\beta$  szögek a mért  $\alpha'$ -t és  $\beta'$ -t rendre  $180^\circ$ -ra egészítik ki.
3. Az  $A$  és  $B$  pontnál található  $\alpha$  és  $\beta$  szögek ugyanahhoz a szaggatott húrhoz tartozó kerületi szögek, így meg egyeznek a  $P$  pontban található megfelelő szögekkel.  $S$  koordinátái így az  $A$ ,  $B$  pontokból és e két szögből előremetszéssel meghatározhatók. Az előremetszéshez részeredményként számított  $t_{AS}$  távolságra és  $\delta_{AS}$  irányra még szükségünk lesz.
4.  $S$  és  $C$  koordinátáiból II. geodéziai főfeladattal kapjuk a  $\delta_{SC}$  azimutot.  $\delta_{SP} = \delta_{SC}$ ;  $\delta_{SA} = \delta_{AS} \pm 180^\circ$ ; továbbá  $\eta = \delta_{SP} - \delta_{SA}$ . Ha  $\eta < 0$ , adjunk hozzá  $360^\circ$ -ot!
5. Az  $ASP$  háromszög szögeinek összege  $180^\circ$ , így a  $\beta$  és  $\eta$  segítségével megadjuk  $\zeta$ -t.
6. Szinusztétellel kiszámítjuk a  $t_{AS}$  távolságból,  $\zeta$ -ből és  $\beta$ -ból a  $t_{SP}$  távolságot.
7. Az  $S$  pontból kiindulva I. geodéziai főfeladattal  $P$  megkapható.



IV.2. ábra. Hátrametszés, a vörös adatok ismertek

Fenti levezetés feltételezte azt az ideális helyzetet, hogy a  $P$  pont az  $ABC$  háromszög belsejében helyezkedik el. Ha ez nem így van, akkor a három pont szerepét úgy kell kijelölni, hogy a  $P$  pont felől nézve az  $A$  legyen jobbra,  $C$  középen (a  $PS$  félegyenesen),  $B$  balra. Ilyenkor  $\alpha$  és  $\beta$  közvetlenül mérendő; és vigyáznunk kell, mert ha  $C$  a körön (az  $S$  ponton) túl található (a képletekből  $\eta$  homorúsögnak adódik), akkor  $\delta_{SP} = \delta_{SC} \pm 180^\circ$ !

## IV.2. Lejtőszög és kitettség

Egy  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény *gradiensének* nevezzük azt a vektort, amelynek *derékszögű* koordinátái a megfelelő tengely irányába vett parciális deriváltakból állnak. Ha például a magasságot egy  $z(x, y)$  függvénynek tekintjük, akkor a gradiense  $\nabla z = (\partial z/\partial x; \partial z/\partial y)$ . *Vigyázat, életveszély! Az itt leírt számítások csak derékszögű koordináta-rendszerben működnek! Eszébe ne jusson még QGIS-ben sem földrajzi koordináták alapján lejtőszöget vagy domborzatárnyékolást számolni!* Mivel a gradiens parciális deriváltakból áll, maga is hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, mint a függvények deriváltja: iránya mindig arra mutat, amerre a legmeredekebben emelkedik a függvény, hossza pedig a terep meredeksége, azaz a lejtőszög tangense. Ezek szerint a  $\vartheta$  lejtőszög így számítható ki:

$$\operatorname{tg} \vartheta = |\nabla z| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$\vartheta$  mindig hegyesszög, a megoldások közül csak ezt fogadjuk el. Időnként a lejtő meredekségét százalékban szokták megadni, azaz hogy vízszintesen 1 m-t megtéve hány cm lesz a magasságkülönbség. Mivel a gradiens azt mondja meg, hogy ugyanekkora távolságon hány m az emelkedés, így a meredekség  $100|\nabla z|$  százalék.

Mivel a gradiens fölfelé mutat, a lejtés iránya a gradiens ellentettjének iránya lesz. Ennek  $\alpha$  azimutja a II. geodéziai főfeladatból (északkeleti tájékozású rendszerben):

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) \left/ \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) \right.$$

*Itt van helye a bölcsességnek!* Ránézésre a két mínuszjel a számlálóban és nevezőben gyönyörűen kiejti egymást, azonban ezúttal ez csúfos hibát okozna! Az ok, hogy azimutszámításnál az eredményhez  $180^\circ$ -ot hozzá kell adnunk, ha a nevező negatív, és az egyszerűsítéssel a nevező előjelét ügyesen megfordítanánk.

Persze ritkán ismertek a domborzat parciális deriváltjai. Olyan viszont előfordulhat, hogy egy szabályos rács mentén ismertek a terep magassági adatai. Ha a rács felbontása  $\Delta r$ , akkor a derivált közelíthető a szomszédos rácsponthoz magassági értékeiből differenciahányadossal:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \approx \frac{z_E - z_D}{2\Delta r} \quad \frac{\partial z}{\partial y} \approx \frac{z_K - z_{Ny}}{2\Delta r}$$

Ha viszont az ismert magassági pontok nem szabályosan helyezkednek el (ún. TIN-modell), akkor a három legközelebbi pontra tudunk egy síkot illeszteni. Ennek gradiense így számíthatjuk ki: Vegyünk egy, a síkra merőleges  $\vec{n}$  vektort, amelynek  $z$  koordinátája legyen  $-1$ ! (Feltételezve, hogy a sík nem függőleges, igazából akár-mekkora  $z \neq 0$  koordinátát is kiköthetnénk, hiszen az  $\vec{n}$  vektor hossza nekünk irreleváns.) Ekkor az első ismert pontból bármelyik, a síkon található pontba mutató vektor merőleges  $\vec{n} = (a; b; -1)$ -re, azaz a vele vett skaláris szorzata 0:

$$\begin{aligned} \vec{n}(\vec{p} - \vec{p}_1) &= a(x - x_1) + b(y - y_1) - (z - z_1) = 0 \\ z &= ax + by - ax_1 - by_1 + z_1 \end{aligned}$$

\* A térinformatikában gyakran kifinomultabb, pl. HORN- vagy ZEVENBERGEN–THORNE-képleteket használnak a gradiens becslésre.

Deriválva:  $\partial z/\partial x = a$  és  $\partial z/\partial y = b$ .

$a$  és  $b$  helyére behelyettesíthetjük tehát a deriváltakat. Ezen felül az egyenlet értelemszerűen igaz kell legyen a második és harmadik pontra is (hiszen ezek is a mi síkunkban vannak), így  $x, y$  és  $z$  helyére pedig egyszer a második, egyszer pedig a harmadik pontunk koordinátáit írjuk be:

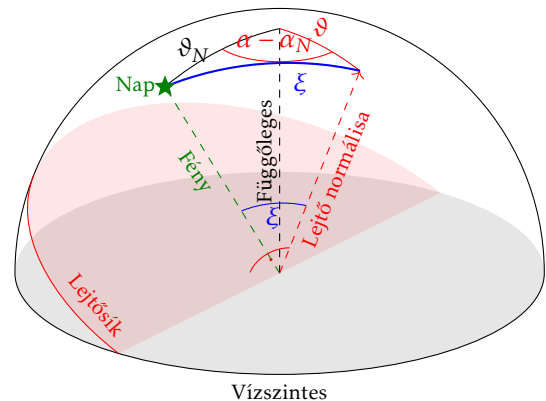
$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_2 - x_1) + \frac{\partial z}{\partial y}(y_2 - y_1) = z_2 - z_1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_3 - x_1) + \frac{\partial z}{\partial y}(y_3 - y_1) = z_3 - z_1$$

Az ismeretlen deriváltak ebből pl. CRAMER-szabállyal megoldhatók.

## IV.3. Domborzatárnyékolás

Summer készítésekor a felszint tükröződésmentes visszaverő felületnek tekintjük, így a visszaverődött fény mennyisége független a nézőponttól, kizárólag a napfény beesési szögétől függ. A megvilágítás mértéke gyakorlatilag a világítótest felé mutató vektornak a normális (lejtősíkra merőleges vektor) irányába mutató komponensétől függ. Ez pedig nem más, mint a két vektor között található  $\xi$  szög (IV.3. ábra) koszinusza.



IV.3. ábra. Domborzatárnyékolás számítása

Az egységsugarú éggömbre fölrajzolható egy égi gömbháromszög, melynek csúcsai a függőleges, a Nap és a lejtő normális. Tudjuk, hogy a függőlegessel a lejtő normális éppen a  $\vartheta$  lejtőszöget zárja be, és  $\alpha$  lejtésirányba áll. A Nap állása legyen a függőlegetől  $\vartheta_N$  szögre és  $\alpha_N$  azimutra! Ekkor az oldalkoszinusz-tételből a visszavert fény  $i$  intenzitása:

$$i = \cos \xi = \cos \vartheta \cos \vartheta_N + \sin \vartheta \sin \vartheta_N \cos(\alpha - \alpha_N)$$

Ha  $i$  negatív, akkor a terület árnyékban van, a visszavert intenzitás zérus.

A kartográfiai gyakorlatban a világítótestet leggyakrabban északnyugati irányba ( $\alpha_N \approx 315^\circ$ ) helyezzük, amely irányban a Nap a valóságban soha nem tartózkodik; azonban megfelel egy jobbkezes ember asztali lámpájának. Az árnyékok annál határozottabbak lesznek, minél alacsonyabb a megvilágítás. Igazán látványos summer analitikus módon nem készíthető, a domborzat helyes generalizálásán alapuló árnyékolás készítése sok tapasztalatot igényel.

## Ötödik előadás

# A valószínűesszámítás alapvető fogalmai

### V.1. Valószínűségi mező és változó

Egy  $\Omega$  halmaz (továbbiakban *eseménytér*) összes lehetséges részhalmazából képezzük a  $\mathcal{P}(\Omega)$  halmazt, majd vegyünk egy olyan  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  részhalmazt (továbbiakban *eseményalgebra*, elemei pedig *események*), amely tartalmazza az üres halmazt, továbbá minden elemének az  $\Omega$ -ra vonatkozó komplementerét és bármely két elemének az unióját is! Határozzunk meg egy  $p: \mathcal{A} \rightarrow [0; 1]$  függvényt (*valószínűség*), amely az üres halmazhoz 0-t,  $\Omega$ -hoz 1-et rendel, és bármely két *diszjunkt* halmaz uniójához a halmazok valószínűségeinek összegét rendeli. Az  $(\Omega; \mathcal{A}; p)$  struktúrát ekkor *valószínűségi mezőnek* nevezzük.

A definíció azért ennyire absztrakt, hogy a valószínűségi mező a matematika számos területén előforduló jelenségeket tudja modellezni. Leggyakrabban azonban véletlen kísérletek modellezésére alkalmazzuk, ahol  $\Omega$  a kísérlet lehetséges kimeneteit tartalmazza, és  $p$  a kimenetekből képezett halmazokhoz (ezek az események) az esemény valamely elemével egyező kísérleti eredmények száma és az összes kísérlet száma közötti arány határértékét rendeli végtelen sok kísérletet feltételezve.

Mivel az egyes kimenetek általában matematikailag nehezen megfogható fogalmak szoktak lenni, érdemes az eseménytér elemeihez egy-egy valós számot hozzárendelni. A  $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt *valószínűségi változónak* nevezzük, ha bármely  $x$  valós számra az  $\xi(\omega) < x$  feltételt teljesítő  $\omega$  kimenetekből képzett halmaz egy esemény (vagyis a  $\{\xi < x\}$  halmaznak van valószínűsége).

### V.2. Az eloszlás

Egy  $\xi$  valószínűségi változó  $F: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  monoton növekvő *eloszlásfüggvénye*  $F(x) = p(\{\xi < x\})$ .  $\xi$  *folytonos változó*, ha eloszlásfüggvénye folytonos, és *diszkrét*, ha megszámlálhatóan sok különböző értéket vehet föl. Előfordulhat, hogy  $\xi$  sem nem folytonos, sem nem diszkrét.  $\xi$  *sűrűségfüggvénye* az az  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0; \infty]$  függvény, amelyre

$$\int_{-\infty}^x f(x) dx = F(x)$$

Ha  $F$  differenciálható, akkor deriváltja  $f$ . Nagyon pongyolán fogalmazva  $f$  azt mutatja be, hogy mennyire valószínű, hogy  $\xi \approx x$ .

A valószínűségi változó jellemző kimenetét mutatja  $\mathcal{M}(\xi)$  *várható értéke*, amely (ha az alábbi integrál nem konvergens, a várható értéket nem értelmezzük):

$$\mathcal{M}(\xi) = \int_{\Omega} \xi dp$$

Azaz a várható érték pongyolán fogalmazva  $\xi$  lehetséges értékeinek valószínűséggel súlyozott átlaga. A valószínűségi változó *mediánja* az az  $x$  szám, melyre  $\mathcal{M}(|\xi - x|)$  minimális, vagy amelyre  $p(\{\xi \leq x\}) \geq 1/2 \leq p(\{\xi \geq x\})$ , azaz igen pongyolán: amely számhoz képest azonos valószínűséggel lesz  $\xi$  kisebb, mint nagyobb. A valószínűségi változó *módusa* az a szám, amelyre a sűrűségfüggvény maximális.

Az eloszlás kiterjedését a *szórás* jellemzi, azaz hogy  $\xi$  várhatóan mennyire tér el a várható értékétől:

$$\mathcal{D}(\xi) = \sqrt{\mathcal{M}[(\xi - \mathcal{M}(\xi))^2]}$$

Hasonlóan számítjuk az *átlagos abszolút eltérést*, amely a várható értéktől (időnként a mediántól) vett eltérések abszolútértékeit átlagolja:  $\mathcal{M}[|\xi - \mathcal{M}(\xi)|]$

### V.3. Mérési skálák

A valószínűségi változókon természetüknél fogva nem mindig végezhető el minden művelet. Pontosabban fogalmazva elvégezhető, de garantált, hogy értelmes eredmény nem születik belőle.

A valószínűségi változó skálája lehet:

- *Nominális skála*, azaz a kisebb-nagyobb reláció sem értelmezhető. Bár (pl. adatbázisban tárolás céljából) rendelhetünk a jelenséghez számokat, ezek mennyiséget nem jelölnek. Semmilyen matematikai művelet nem végezhető, még a mediánját sem jelölhetjük ki (hiszen ahhoz pont összehasonlítást végeznénk), kizárólag móduszát kereshetjük meg. Általában diszkrét, véges darabszámú kimenet lehet. Példa: nemzetiségi hovatartozás.
- *Ordinális skála*, azaz összehasonlítást végezhetünk, de az összeadás, különbségképzés értelmetlen. Mediánt már számíthatunk, átlagot (várható értéket) nem. Szintén csak diszkrét értékeket vehet föl. Példa a települések jogállása, a város nagyobb rangú, mint egy község, de kisebb, mint egy megyei jogú város. Mégsem lehet megmondani, mennyivel nagyobb egyik a másiknál.
- *Intervallumskála*, amelynél különbséget tudunk képezni, de arányt már nem. Az átlagolás értelmezhető. Eloszlásfüggvénye folytonos is lehet. Például ha Szegeden 6 fokot mérünk, míg Miskolcon  $-2$ -t, akkor Szegeden 8 fokkal van melegebb, mint Miskolcon, de véletlenül sem  $-3$ -szor akkora a hőmérséklet...
- *Arányskála*, vagyis, ahol szorzás-osztás értelmes.

Arányskálájú változóból létezik *multiplikatív* és *additív*. A multiplikatív változó soha nem lehet negatív, soha nincs mértékegysége, és az összeadás nem ad értelmes eredményt. Például multiplikatív arányskálájú változó,

hogyan változott a GDP az előző évhez képest. Ha két egymást követő év növekedését összeadjuk, nem tudunk meg semmit. Ha összeszorozzuk, megkapjuk, hogy a két évben összesen mekkora volt a növekedés. *Multiplikatív mennyiségeknek ezért nem vehetjük a számtani közepét!* Arányt is képezhetünk, meg tudjuk mondani, hányszorosa volt a második évi növekedés az előzőhöz képest. A multiplikatív változók könnyen fölismerhetők arról, hogy az 1-nél kisebb értékek jelzik a csökkenést.

Az additív arányskálájú változók esetén mind a négy alpművelet elvégezhető, lehet mértékegysége. Példa a hőmérséklet-változás. Ha első nap 2 fokot, második nap 4 fokot emelkedett a hőmérséklet, de harmadik nap 6 fokot csökkent, akkor a teljes hőmérséklet-változás egyszerűen  $2 + 4 + (-6) = 0$  fok. Annak is van értelme, hogy a második napi változás kétszerese, a harmadik napi pedig mínusz háromszorosa volt az első napinak.

Fontos, hogy *transzcendens függvényeket* (pl. szinusz, logaritmus) csak olyan arányskálájú változón vehetünk, amelynek nincs mértékegysége, azaz tömegnek nincs szinusza, de szögnek (a radián nem igazi mértékegység) már van! Az, hogy egy művelet elvégezhető, még mindig nem jelenti, hogy minden körülmény között értelmes. Például a település lélekszáma arányskálájú (lehet egy település kétszer akkora), additív (azaz a vármegye lélekszáma a települések lélekszámainak összege), viszont nem adhatom össze ugyanannak a falunak a 2010. és 2020. évi lélekszámát (hacsak nem átlagolni akarok).

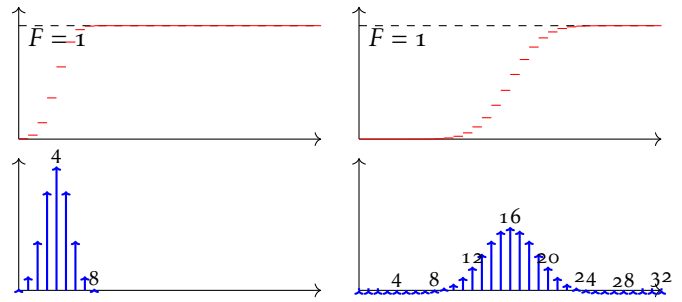
## V.4. Számunkra érdekes eloszlások

Vegyünk egy olyan kísérletet, amelynek két kimenete van (pl. pénzfeldobás)! Ekkor a kísérlet  $\xi_1$  valószínűségi változója  $P$  valószínűséggel 1 (pl. fej),  $1-P$  valószínűséggel 0 (pl. írás). A következő dobás  $\xi_2$  eredménye azonos eloszlású és független, azaz  $p(\{\xi_1 = k_1 \text{ és } \xi_2 = k_2\}) = p(\{\xi_1 = k_1\})p(\{\xi_2 = k_2\})$  bármilyen lehetséges  $k_1, k_2$  kimenetekre. Ismétéljük meg a dobást párszor, és adjuk össze a kimeneteket (ti. hányszor dobtunk fejet)!  $\xi = \sum \xi_i$  ilyenkor *binomiális eloszlást* követ, azaz

$$p(\{\xi = k\}) = \binom{n}{k} P^k (1-P)^{n-k}$$

Ahol  $n$  a kísérletek darabszáma,  $P$  pedig a kedvező kiment valószínűsége (azaz példánkban  $1/2$ ). Ebből számítható az eloszlásfüggvény (és bár az eloszlásfüggvény nem differenciálható, a XII.1. fejezetben megismert DIRAC-δ segítségével igazából a sűrűségfüggvény is leírható). Az V.1. ábrán megfigyelhető, hogy  $n$  növelésével a sűrűségfüggvény jellegzetes, harangszerű alakot kezd ölteni.

Tulajdonképpen ugyanezt a harangszerű alakot kapjuk vissza bármely független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegére. Ezért az ilyen sűrűségfüggvényű változót *normális eloszlásúnak* nevezzük. A *centrális határeloszlás tétele* szerint végtelen sok független, azonos eloszlású valószínűségi változó összege (és így az átlaga is) *normális eloszlású*. Azaz például ha ugyanazzal a módszerrel megmérünk egy szöveget vagy távolságot, akkor sok mérést követően a műszer hibáitól függetlenül a mérések *átlaga* közel normális eloszlású. Ezért a normális eloszlást jellemzően mérési és mintavételi hibák modellezésére

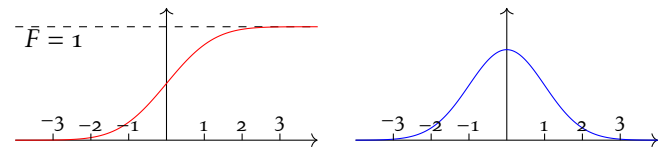


V.1. ábra. Fejek számának valószínűsége (fölül eloszlás, alul sűrűség) 8 ill. 32 pénzfeldobásból. A nyilaknál a sűrűségfüggvény végtelen, a nyilak hossza a függvény alatti területtel arányos.

használjuk. Vigyázat, életveszély! A mérési eredmények sokasága nem lesz attól normális eloszlású, hogy sokszor mértünk! A  $\mu$  várható értékű,  $\sigma$  szórású normális eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Ezt a függvényt *haranggörbének* nevezzük. A normális eloszlás eloszlásfüggvénye a definíció szerint a sűrűségfüggvény primitív függvénye, ezt azonban nem lehet szokásos függvények segítségével zárt alakban leírni. A 0 várható értékű és 1 szórású normális eloszlás neve *standard normális eloszlás* (V.2. ábra).

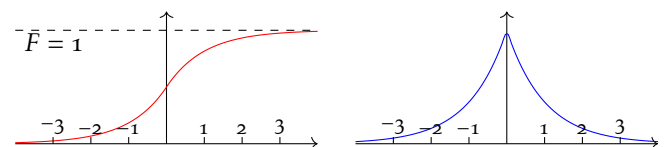


V.2. ábra. Standard normális eloszlás

A normális eloszlás használatának egy lehetséges buktatója, hogy sűrűségfüggvénye nagyon gyorsan csökken a várható értéktől távolodva. Így nem tudja jól modellezni azt a körülményt, ha mérési módszerünk hajlamos kiugró mérési hibát produkálni és nincs lehetőségünk ezt sok mérés átlagával kiegyenlíteni. Ezért a geodéziában időnként használjuk még a *LAPLACE-eloszlást* (V.3. ábra), amely nagyobb valószínűségeket modellez a várható értéktől távol. Ha az eloszlás várható értéke  $\mu$ , az attól vett átlagos abszolút eltérés  $b$ , akkor az eloszlás- és sűrűségfüggvény:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\frac{x-\mu}{b}} & \text{ha } x \leq \mu \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x-\mu}{b}} & \text{ha } x \geq \mu \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}$$



V.3. ábra. LAPLACE-eloszlás ( $\mu = 0; b = 1$ )

## Hatodik előadás

# Leíró statisztika

### VI.1. Középértékek

Egy valószínűségi változó eloszlását gyakran lehetetlen pontosan megismerni. Lehet például, hogy a populáció túl nagy ahhoz, hogy megérje a mérést minden tagján elvégezni. Ilyenkor egy kisebb,  $n$  darabos mintát veszünk, és ezen a mintán mérjük meg a valószínűségi változó  $x_i$  értékeit. A teljes sokaság eloszlásának jellemzőire megpróbálunk a minta eloszlásának jellemzőire következtetni.

Gyakran vizsgáljuk a minta középértékeit. A leggyeszerűbb középérték a *számtani közép* vagy *átlag*, amelyet úgy képezünk, hogy a mintákat összeadjuk, és elosztjuk a minták darabszámával:

$$\mu = \bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

A számtani közép kedvező tulajdonsága, hogy  $M(\bar{x}_i) = M(\xi)$ , azaz a minta átlagának várható értéke éppen az eredeti, mérni kívánt eloszlás várható értéke. E mellett az átlag eloszlása jó közelítéssel egy  $\sigma/\sqrt{n}$  szórású normális eloszlás, ahol  $\sigma$  a  $\xi$  változó szórása; azaz a minta átlagának várható hibája jól becsülhető. Ez viszont nem jelenti azt, hogy ész nélkül használhatjuk.

Az első gondot a *viszonyszámok* okozzák, amelyeket két mennyiség arányából számítunk. Például Bergengőcia területének felén 200 fő/km<sup>2</sup> a népsűrűség, a másik felén 50 fő/km<sup>2</sup>. Mekkora az átlagos népsűrűség? Legyen Bergengőcia teljes területe  $2t$ , ekkor a teljes népesség  $200t + 50t = 250t$ . Ebből a népsűrűség  $250t/(2t) = 125$  fő/km<sup>2</sup>, azaz számtani közepet vettünk. Galambóciában viszont a lakosság fele él 200 fő/km<sup>2</sup> népsűrűségű területen, a másik fele 50 fő/km<sup>2</sup> sűrűségűben. Legyen a teljes lakosság  $2l$ , ekkor Galambócia területe  $l/200 + l/50 = l/40$ . Ebből a népsűrűség  $2l/(l/40) = 80$  fő/km<sup>2</sup>! *Viszonyszámok számtani közepét csak akkor számíthatjuk, ha a nevezőben szereplő mennyiséggel súlyozunk. Egyébként harmonikus közepet számítunk. A harmonikus közép számítása:*

$$\mu_H = 1 / \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)$$

Akkor is gondban vagyunk, ha a vizsgált jelenség multiplikatív (például kamat, növekedési ráta), hiszen ilyenkor a szumma nincs értelmezve. Ekkor a minta *mértani közepét* kell vennünk. Az alábbi levezetésnél vegyük észre, hogy a multiplikatív mennyiségek mindig pozitívak és nincs mértékegységük, ezért logaritmusuk mindig értelmezhető:

$$\mu_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \exp \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i \right) = e^{\overline{\ln x_i}}$$

A mértani közép alkalmazandó a multiplikatív viszonyszámokra is, függetlenül attól, hogy a számláló vagy a nevező szerint súlyozunk.

Az átlag használata félrevezető, ha a vizsgált mennyiség szórása nagy; sok kiugró érték van a sokaságban. Ilyenkor az átlag becslési bizonytalansága megnő, a kiugró minták a szummába kerülve „eltéríthetik” az átlagot. Ezért sokkal robosztusabb becslésnek számít a *medián*, amelyet úgy számítunk, hogy az elemeket sorba rendezzük, majd a középső értéket (páros mintaszám esetén a középső két érték átlagát) vesszük. A medián nem érzékeny a kiugró értékekre, hiszen ha véletlenül lenne néhány ilyen mintánk, azok úgyis a sor elejére vagy végére fognak kerülni.

Még robosztusabb középérték a *módusz*, azaz a leggyakoribb érték kiválasztása, hiszen ezt a kiugró értékek egyáltalán nem befolyásolják. Azonban a módusz használata értelemszerűen csak diszkrét változóknál jöhet szóba.

### VI.2. Diszperzitás

Ha az érdekel minket, hogy a mért adatok mennyire térnek el a középértéktől, jó lehetőség a *tapasztalati szórás* vizsgálata, amelyet ugyanúgy számítunk, mint egy valószínűségi változó szórását:

$$\sigma = \sqrt{(x_i - \bar{x}_j)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right)^2}$$

A szórást várható értéként, a tapasztalati szórást pedig átlagként definiáltuk, joggal feltételeznénk, hogy a változó szórásának és tapasztalati szórásnak várható értékei megegyeznek. Ez így is lenne, ha ismernénk a zárójelen belül lévő átlag valódi értékét. Azonban a valóságban ezt is *ugyanabból* a mintából tudjuk becsülni, márpedig a minta átlaga az igazi átlaghoz képest el fog tolni a minta elemei felé. Ezért a szórást alulbecsüljük. Hosszadalmas számításokkal megmutatható, hogy  $M(\sigma^2) = (n-1)/n \cdot D^2(\xi)$ .<sup>\*</sup> Ezért bevezetjük a *korrigált tapasztalati szórást*, amelynek várható értékének négyzete megegyezik a teljes populáció szórásnégyzetével:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

Korrigált tapasztalati szórást akkor kell használnunk, ha a teljes populációra vonatkozó adatsor nem ismert, hanem egy kisebb mintáról van ismeretünk.

A tapasztalati szórás alkalmazása nem robosztus, ha a mért valószínűségi változó hajlamos a kiugró értékekre. Ilyenkor (mivel a kiugró eltérés még négyzetre is van

<sup>\*</sup> Sasszeműek észrevehetik, hogy itt valójában a szórás négyzetének várható értékét számítottuk ki, így ennek torzítását tudjuk korrigálni. Valójában a négyzetre emelés nem lineáris, ezért szigorúan véve a korrigált tapasztalati szórás továbbra is torzít valamennyire, azonban a torzítás mértékét lehetetlen a valószínűségi változó eloszlásának ismerete nélkül megmondani.

emelve), a kiugró érték jelentősen megnövelheti a szórást. Kiugró értékek esetén az *átlagos abszolút eltérést* számíthatjuk:  $|x_i - \mu|$ , ahol  $\mu$  általában az átlag, de időnként a medián is lehet.

Érdekes jellemző még a *terjedelem*, amely a legnagyobb és legkisebb mintánk különbsége. Sajnos a minta terjedelme nem jó jellemzője a valószínűségi változó eloszlásának, hiszen ha történetesen nem választottuk bele a teljes sokaság legkisebb és legnagyobb értékét a mintába (ami azért, valljuk meg, elég valószínű), akkor a terjedelmet alulbecsüljük; ráadásul addig becsült értéket előrejelezni is esélytelen, amíg nem választottuk bele a teljes populációt a mintába.

### VI.3. Kvantilisek

Egy  $\xi$  valószínűségi változó  $k$ -adik  $q$ -kvantilisének nevezzük azt az  $x$  értéket, amelyre  $p(\{\xi < x\}) \leq k/q \leq p(\{\xi < x\})$ . Ezek szerint a medián az első 2-kvantilis. Hasonlóan definiáljuk a minta kvantilisét is.

A hallgatók álomba ringatására messzemenően alkalmas definíciót pongyolán úgy szemléltethetjük, hogy ha a sokaságban található adatainkat növekvő sorrendbe rendezzük, akkor a  $k$ -adik  $q$ -kvantilis az a szám, amelynél az elemek éppen  $k/q$  része kisebb,  $1 - k/q$  része pedig nagyobb. A 4-kvantilis neve *kvartilis*, a 10-kvantilisé *decilis*, a 100-kvantilisé pedig *percentilis*. Ezek szerint a 75. percentilis és a harmadik kvartilis ugyanaz a szám, amelyhez képest az adatok éppen 75 %-a vagy háromnegyede kisebb. A kvantilisek tehát a mintánkat négy, egyenlő mintaszámú részre osztják, továbbá a medián a második kvantilissal azonos (hiszen az felezi a mintánkat).

A kvantilisek elhelyezkedése jól szemlélteti a minta diszperzitását is, hiszen pl. minél távolabb vannak az első és harmadik kvantilis a mediántól, annál nagyobb a minta eltérése a középértéktől.

### VI.4. Paraméterbecslés

Mérjünk többször egymás után ugyanazzal a módszerrel pl. egy távolságot lézeres távmérővel! Műszerünk a mérési hibák eredményeképp nem mindig ugyanazt az eredményt jelzi ki, hanem a kiírt érték valamilyen (ismeretlen)  $\xi$  valószínűségi változó. Ha a műszer nem hord félre (nincs *szisztematikus hibája*), akkor  $\xi$  várható értéke éppen a mérni kívánt hossz. Hogyan tudnánk megbecsülni, hogy mi a *legvalószínűbb* várható érték méréseink (azaz  $\xi$  mintái) alapján?

Ha tudjuk, hogy műszerünk nem hajlamos kiugróan hibás értékekre, akkor feltételezhetjük, hogy  $\xi$  jó közelítéssel normális eloszlású. Ennek keressük  $\mu$  várható értékét. A sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Vegyük az  $\mathcal{L} = \prod_i f(x_i)$  szorzatot (ezt csúnyán *likelihood-függvénynek* hívjuk)! Világos, hogy nem valószínű, hogy olyan  $x_i$  mintát fogunk ki, amelyre az  $f$  sűrűségfüggvény kicsi. Tehát annál valószínűbb, hogy jó  $f$  sűrűségfüggvényt választottunk, minél nagyobbak az  $f(x_i)$  értékek. Tehát minél nagyobb  $\mathcal{L}$ , annál jobban illeszkednek mérési adataink a választott eloszlásra.

Ha  $\mathcal{L}$  maximális, logaritmus is maximális. Ebből:

$$\ln \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \ln[f(x_i)] = \sum_{i=1}^n -\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

A maximumhelyen a derivált zérus:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu} \ln \mathcal{L} &= - \sum_{i=1}^n -\frac{(x_i - \mu)}{\sigma^2} = -\frac{2n}{\sigma^2} \mu + \frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i &= n\mu \\ \mu &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}_i \end{aligned}$$

Ezek szerint *normális eloszlású valószínűségi változók legvalószínűbb várható értéke a minta átlaga*.

Mi van akkor, ha műszer hajlamos kiugró mérési hibákat eredményezni? Legyen a mérés eredménye LAPLACE-eloszlású! Ekkor:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} \\ \ln \mathcal{L} &= \sum_{i=1}^n \ln[f(x_i)] = \sum_{i=1}^n -\ln(2b) - \frac{|x_i - \mu|}{b} \\ \frac{d}{d\mu} \ln \mathcal{L} &= \sum_{i=1}^n \frac{\text{sign}(x_i - \mu)}{b} = 0 \end{aligned}$$

A fenti kifejezés csak akkor lehet nulla, ha  $x_i - \mu$  előjelei kiejtik egymást, azaz pontosan ugyanannyi  $x_i$  érték kisebb  $\mu$ -nél, mint amennyi nagyobb nála. Ez éppen a medián definíciója, azaz LAPLACE-eloszlású valószínűségi változók *legvalószínűbb várható értéke a minta mediánja*. Ez megerősíti azt a korábbi intuitív megállapításunkat, miszerint kiugró értékek esetén a medián alkalmazása szerencsésebb az átlagnál.

A likelihood-függvény maximalizálásán alapuló becslő eljárásokat *maximum likelihood módszereknek* nevezzük. A normális eloszláson alapuló maximum likelihood módszer specielis *legkisebb négyzetek* módszerének (hiszen ekkor a  $\sum (x_i - \mu)^2$  kifejezést minimalizáltuk), a LAPLACE-eloszláson alapuló *legkisebb abszolút eltérések* módszerének nevezzük (hiszen  $\sum |x_i - \mu|$ -t minimalizáltuk).

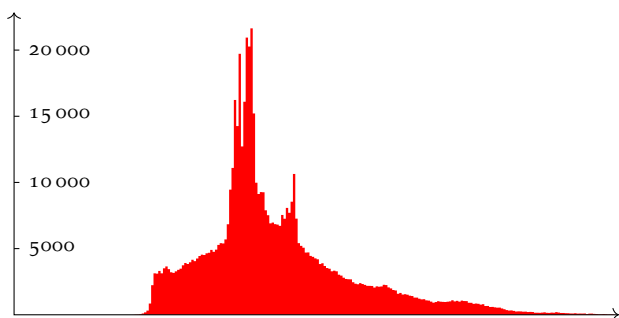
## Hetedik előadás

# Osztályozás

### VII.1. Hisztogram

Egy minta eloszlásáról igen szemléletes képet kaphatunk, ha előállítjuk a *hisztogramját*. Ezt úgy készítjük el, hogy a vízszintes tengelyen feltüntetjük a minta lehetséges értékeit, és függőleges irányban egy-egy vonalat húzunk, amelynek hossza attól függ, hány mintánk vette föl ezt az értéket. Folytonos valószínűségi változó esetén célszerű a lehetséges értékeket véges darabszámú intervallumra fölosztani, és az oszlopok magasságát az adott intervallumba eső értékek darabszámához igazítani. A hisztogram alakja nagy mintaszám esetén jól közelítheti a sűrűségfüggvény alakját, így a populáció eloszlására is tudunk következtetni.

A VII.1. ábrán például a vízszintes tengely a feketétől a fehérig különböző intenzitású árnyalatokat jelöl, és az egyes oszlopok olyan magasak, ahány adott intenzitásértékű képpont található a IX.4. ábrán.



VII.1. ábra. A IX.4. ábrán látható légifelvétel hisztogramja

A fenti hisztogramon jól látható, hogy világos képpontból csak kevés van a képen, míg alacsony intenzitású (sötét) képpont egyáltalán nincs rajta. A legtöbb képpont közepesen világos, vagy attól csak kissé sötétebb. Az ilyen képek kontrasztszegények, mintha egy szürke ködös fátyol lenne rajtuk. A legtöbb légi- és űrfelvétel a levegő rossz fényáteresztő tulajdonságai miatt hasonló hisztogramot mutat.

Ennek elhárítására alkalmazzuk a *hisztogram-kiegyenlítést*. Ilyenkor a kép kontrasztját úgy növeljük meg, hogy egy lineáris függvénnyel a legsötétebb képpontot feketére, míg a legvilágosabbat fehérre képezzük le (általában ez előtt a kiugró értékeket le szoktuk vágni), a köztes képpontok intenzitását pedig széthúzzuk. Az így előállított kép kontrasztosabb lesz, így szabad szemmel tisztábban kivehető az információ, azonban a színhelyesség elvész (VII.2. ábra). A *hisztogram-kiegyenlítés nem ad hozzá új információt a képhez, ezért a gépi látás szempontjából kevés haszna van, ez inkább az emberi szem számára előnyös átalakítás!*



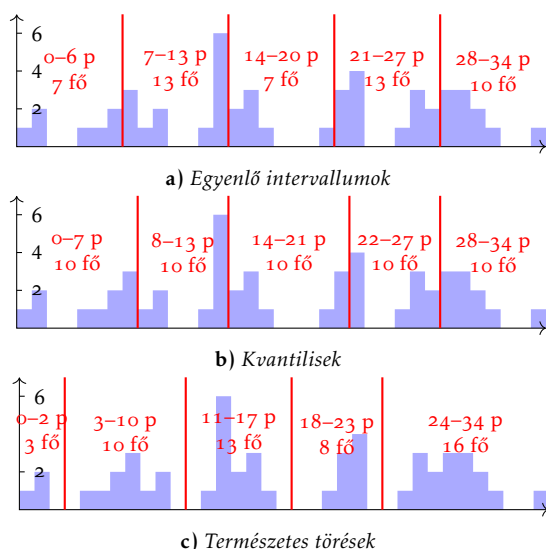
VII.2. ábra. A IX.4. ábra hisztogram-kiegyenlítés után

### VII.2. Egyváltozós osztályozás

Tanár Úr 50 hallgatóval íratott egy 34 pontos vetületen ZH-t. Hol húzza meg az osztályzatok ponthatárát? Melyik hallgató fog panaszkodni, hogy csak egy ponttal maradt le a jobb osztályzatról? Egy tematikus térképen színezéssel szeretném ábrázolni a települések valamely gazdasági mutatóját, de nem használhatok annyi színt, ahány településem van (a térképolvasó szeme 7 különböző szín fölött ki szokott folyni). Hol húzzuk meg az azonos színekkel jelölt kategóriák értékhatárait? Melyik település fog éppen átcsúszni abba a kategóriába, ahol a döntéshozók már nem adnak felzárkóztatási forrásokat? A két probléma párhuzamai szembetűnőek.

Visszatérve a zárthelyi példájára, legegyszerűbb módszer, hogy egyenletesen, hét pontonként jelöljük ki a ponthatárokat. Ez az *egyenlő intervallumok* módszere. A VII.3. ábrán lévő hisztogramról látható, hogy ezúttal ez nem volt szerencsés választás, hiszen hat hallgató is egy ponttal csúszott le a közepes osztályzatról. Így nem kaptunk reális képet a hallgatók egymáshoz képesti teljesítményéről. Képzeltethetjük, mekkora lesz a sor az iroda előtt a fogadóóra idején! Ennek a módszernek tehát előnye az egyszerűsége és könnyű értelmezhetősége, hátránya, hogy nem alkalmazkodik a minta eloszlásához.

Tanár Úr következő ötlete, hogy minden osztályzatot egyformán 10-10 hallgatónak fog kiosztani. Ekkor, mivel a ponthatárok a sokaság 5-quantiliseire esnek, az osztályozást az *egyenlő darabszámok* vagy *quantilisek* módszerének nevezzük. Előnye, hogy ahol az adatpontok sűrűsödnek, ott finomabb osztályozást fog eredményezni. Ugyanakkor Tanár Úr irodája előtt ugyanaz a hat hallgató fog felsorakozni pluszegypontvadászatra a hármasért. A módszer



VII.3. ábra. Tanár Úr próbálkozásai a ZH ponthatárainak megállapításához

előnye tehát, hogy egyik csoport sem lesz alul- vagy felül-reprezentált, tematikus térképeken a színek egyensúlyát is biztosítja. Ordinalis skálájú adatokra is alkalmazható, mert számításához csak sorba rendezést végzünk. Hátránya, hogy a határokat pont ott veszi föl, ahol a leginkább csoportosulnak a minták.

Legizgalmasabb a *természetes törések* módszere, amelynek célja, hogy az egyes csoportokon belül a szórást minimalizálja. Ezt a következő iteratív módszerrel érjük el: Első lépésben a mintánkat tetszőleges módszerrel osztályozzuk, majd minden osztálynak kiszámítjuk az átlagát. Ezt követően az osztályok határait úgy módosítjuk, hogy minden elem az előző lépésben kiszámolt átlagok közül a legközelebbivel azonos osztályba kerüljön. Ettől azonban az egyes csoportok átlaga megváltozik, így azokat újraszámítjuk, majd ismét minden elemet a hozzá legközelebbi átlag osztályához rendeljük és így tovább. Néhány lépés után az eredmény stabilizálódik, és minden elem a saját csoportjának átlagához esik majd a legközelebb.

A módszer nevéhez hűen jól megtalálja az adatsorunkban lévő természetes töréseket, és a határokat oda helyezi. Hátrányként említhetjük, hogy az osztályok számát előre kell megmondanunk; ha adatsorunkban csak négy természetes osztály van, akkor a módszer öt osztályt nem fog tudni optimálisan kiosztani (bár *valamit* ekkor is kapunk eredményül). Hátrány még, hogy az osztályok terjedelme hektikusan változhat: fenti példánkban csupán három

hallgatót buktatna meg a módszer, miközben azért látszik, hogy ez sem tükrözi a valós teljesítményt. Igen érzékeny a kiugró adatokra (azoknak hajlamos saját, egyelemű osztályokat képezni), és közel egyenletes eloszlású mintán inábilis válik, hiszen abban nincsenek természetes törések. Vitathatatlan előnye viszont, hogy jól mutatja az adatsorban található trendeket.

Összefoglalva tehát mindhárom módszernek vannak előnyei és hátrányai. Tematikus kartográfia céljára ugyanakkor egyik módszer sem alkalmas változtatás nélkül. A térkép jelmagyarázatában nem éppen elegáns a települések lélekszámának kategóriahatárát 2873 főnél kijelölni, mert a kvantilisok módszere szerint pont oda esett; a térkép olvasója kerek számokban gondolkozik. Ezért a statisztikai program által ajánlott kategorizálást mindig vizsgáljuk felül! A kategóriahatárok átállításával a térkép által közölt üzenetet alapjaiban befolyásolhatjuk! *Ne úgy kategorizáljunk, hogy igaz legyen ránk a szolás: a hazugságok három csoportba sorolhatók: egyszerű hazugságok, szemérmetlen hazugságok és statisztikák!*

### VII.3. Többváltozós osztályozás

Előfordul, hogy az osztályokat egyszerre több mutató alapján szeretnénk meghatározni. Ilyen lehet például, hogy egyszerre több demográfiai és gazdasági mutató alapján szeretnénk megkeresni egy vidék jellemző településtípusait. A távérzékelésben pedig egyszerre több csatorna (látható, infravörös stb.) képe alapján szeretnénk elkülöníteni a képpontokat (pl. erdő, szántó, vízfelület).

A többváltozós osztályozás vagy *klaszterezés* igen bonyolult feladat, több módszert is kifejlesztettek. A legegyszerűbb az ún. *k-means* klaszterezés, amely a természetes törésekhez hasonló, iteratív eljárást használ: valamilyen particionálást követően minden osztálynak megkeresi az átlagát (súlypontját), majd minden pontot átsorol a hozzá legközelebb eső súlyponthoz, amitől a súlypont elmozdul, és az eljárás kezdődik elölről.

Míg egy dimenzióban ez az eljárás hatékonyan találja meg a természetes törések helyét, több dimenzióban már vannak buktatói. Ilyen például, hogy az osztályok határait mindig a szakaszfelező merőlegesnél, több dimenzióban pedig síkok mentén jelöli ki. Ha csoportjaink természetes alakja nem ilyen, az eljárás eredménye szuboptimális lesz. A többi ismert eljárás szofisztikáltabb statisztikai eszközöket használ, melyek ismertetése túllépi a tantárgy kereteit.

## Nyolcadik előadás

# Matematikai statisztika

### VIII.1. Statisztikai próbák

A *matematikai statisztika* célja, hogy bizonyos közvetlenül nem bizonyítható összefüggéseket statisztikai mintavétel segítségével próbáljon meg igazolni. Talán valamennyi tudományág közül ennek alkalmazása körül van a legtöbb félreértés. Ennek okai között lehet, hogy ránézésre nagy meggyőző ereje van, hiszen szigorúan matematikai eszközökön és számokon alapul; miközben az apparátusa igen bonyolult, így az eredményeket nehéz közérthetően megfogalmazni. Tovább ront a helyzeten, hogy a leggyakrabban használt, egyszerű módszereket a kutatók gyakran hanyagságból anélkül alkalmazzák, hogy meggyőződnenek a módszerek alkalmazhatóságáról, korlátairól (amelyek ráadásul rendszerint amúgy is nehezen érthetők). E miatt lehet, hogy ugyanabból az adatsorból eltérő módszerekkel látszólag ellentmondó eredmények születnek. Talán az ilyen félreértések szülhették a híres szólást: *Csak annak a statisztikának hiszek, amelyet magam hamisítottam.*

Időnként előfordul, hogy az adatsorainkban látható tendenciákról nehéz eldönteni, hogy az eltéréseket a mintavétel bizonytalansága okozta, vagy valódi eltérés van mögötte. Tegyük föl, hogy különböző mérőállomásokon megmértük Piripócsan a talajvízszintet, és rendre 1,6; 1,7; 2,4; 2,5; 2,7; 2,9 méter mélyen volt. Iszapszentgilisztán több mérést végeztünk, az eredmények 1,8; 1,5; 1,7; 1,9; 2,1; 2,3; 1,6; 1,9; 2,0; 2,4 méternek adódtak. Ránézésre úgy tűnik, mintha Piripócsan átlagosan mélyebben lenne a talajvíz szintje. Valóban így van-e, vagy csak a mintavétel bizonytalansága okozza az eltérést?

Az ilyen kérdések eldöntésére *statisztikai próbákat* alkalmazunk. Ez egy többlépéses folyamat:

1. Fölteszünk egy *nullhipotézist*. Ez általában egy nagyon egyszerű állítás, amelyet bizonyítani vagy cáfolni szeretnénk statisztikai adatainkkal.
2. Ezután megfogalmazzuk állításunk ellenkezőjét, az *ellenhipotézist*.
3. Kiszámítunk egy *próbat statisztikát*, amelynek eloszlása a nullhipotézis teljesülése esetén ismert.
4. Ha a próbat statisztika valószínűtlen értéket vett föl, a nullhipotézist elvetjük. Ezt az esetet *szignifikáns eltérésnek* nevezzük.

Az egyik legegyszerűbb statisztikai próba, amelyen a módszert bemutatjuk, a *kétmintás t-próba*. Ennek nullhipotézise az, hogy a mintáink két olyan sokaságból származnak, amelyek várható értéke megegyezik. A kétmintás *t*-próbát kizárólag olyan intervallumskálájú vagy arányskálájú mintákra alkalmazhatjuk, amelyek *normális eloszlásúak*, és *közel azonos szórásúak*. Természetesen e két tulajdonság egyike sem bizonyítható könnyen, ezért ha korrektek akarnánk lenni, ezt a két tulajdonságot is sta-

tisztikai próbákkal kellene igazolni. A valóságban sajnos ez sokszor elmarad, mint ahogy jelen jegyzetben is eltekinünk tőle. E miatt ez egyúttal nem csak a legegyszerűbb, hanem a leggyakrabban tévesen alkalmazott próbák közé is tartozik.

A *t*-próba ellenhipotézise, hogy a két minta nem azonos várható értékű eloszlásból származik. Azaz fenti példánkban a nullhipotézis az, hogy Iszapszentgilisztán és Piripócsan átlagosan azonos a talajvízszint, és a mérések eltérése a mintavétel bizonytalanságából adódik, míg az ellenhipotézis szerint az átlagos talajvízszint eltérő.\*

A *t* próbat statisztika ez esetben:

$$t = \frac{\bar{x}_i - \bar{y}_i}{\sqrt{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_x n_y (n_x + n_y - 2)}{n_x + n_y}}$$

Főnt *x* és *y* a két minta, *n* a minta darabszáma, *s* pedig a *korrigált* tapasztalati szórás. A próbat statisztika ún.  $n_x + n_y - 2$  szabadságfokú *t*-eloszlást követ. Ennek sűrűség- és eloszlásfüggvénye a matematika legínyencebb területeihez tartozik. A hallgatók lelki nyugalmanak megőrzése érdekében itt most megelégszünk annyival, hogy ez egyrészt (a mintaszám növekedésével egyre inkább) közel áll a standard normális eloszláshoz, másrészt pedig jó barátunk, az Excel táblázatkezelő függvényei között úgylis megtaláljuk.

Jelen példánkban adatsorunkra a próbat statisztika  $t = 1,8665$ -nek adódik. Valószínűtlen ez az eredmény?

Az Excel szerint a 14 szabadságfokú *t*-eloszlás 95 % valószínűséggel  $\pm 2,1448$  közé esik. Ha *t* ezen a tartományon kívül esett volna, akkor a nullhipotézist elvetve mondhatnánk, hogy 5 %-os szignifikanciaszint† mellett a két falu talajvízszintje *szignifikánsan* eltér egymástól.

Na de kíváncsiságunkra a táblázatkezelő azt is elárulja, hogy *t* 90 % valószínűséggel  $\pm 1,7613$  közé esik! Akkor ezek szerint a Iszapszentgilisztán a talajvízszint 10 %-os szignifikanciaszint mellett *szignifikánsan* eltért! Nagy a kísértés, hogy a szignifikanciaszintet direkt úgy húzzuk meg, hogy az általunk előzetesen elvárt eredményt szolgálta! *Ne hamisítsunk magunknak statisztikát, a nullhipotézis elutasításának szignifikanciaszintjét mindig a mérés előtt jelöljük ki!*

\* Itt ismét egy nehézségre szeretnénk föl hívni a figyelmet: Nyilvánvaló, hogy két különböző populációnak *sohasem* lesz *hajszálpontosan* egyforma a várható értéke! Éppen ezért, ahogy nő a mintaszám, úgy a *t*-próba egyre inkább hajlamos lesz a nullhipotézist elvetni, és *szignifikáns* eltérést jelezni; még akkor is, ha a várható értékek eltérése számunkra elenyésző.

† A *szignifikanciaszint* azt mutatja, hogy mennyire valószínű, hogy a nullhipotézist feltételezve a kapott minta keletkezik. Sajnos ebből semmit sem tudunk mondani arra a (minket sokkal inkább érdeklő) kérdésre, hogy az adott minta alapján mennyire valószínű, hogy a nullhipotézis igaz.

A  $t$ -próbának számos alternatívája létezik, melyek ismertetésére itt nincs lehetőség. Ilyen például a MANN-WHITNEY-próba, amely nem csak normális eloszlású és ordinális skálájú adatokra is alkalmazható, a mediánok egyezőségét vizsgálja. Sajnos bonyolultsága miatt nem terjedt el használata. Azonban a nullhipotézissel és a szignifikanciaszint értelmezésével kapcsolatos problémák erre is igazak. Gyakran feltűnik még az ún.  $\chi^2$ -próba is, amelyet a minta feltételezett eloszlásának ellenőrzésére vagy két minta függetlenségének igazolására szokás használni.

A statisztikai próbákat a térképtudományban leggyakrabban a *kísérleti kartográfia* alkalmazza, ezek segítségével keressük a választ olyan kérdésekre, hogy az egyes ábrázolásmódok hogyan befolyásolják a térképolvasás hatékonyságát.

## VIII.2. Korreláció

Ha egy mintán több változót is vizsgálunk, érdekes kutatási kérdés lehet az összefüggések feltárása, azok erősségének mérése. A változók összefüggését egy  $-1$  és  $1$  közötti számmal leíró mennyiséget *korrelációnak* hívjuk. Független változók korrelációja mindig  $0$ , de a  $0$  korrelációból nem következik a függetlenség. A pozitív korreláció azt jelöli, hogy a két változó azonos irányban változik, negatív korreláció esetén ha az egyik változó nő, a másik várhatóan csökken. Elméletileg minél erősebb az összefüggés, annál nagyobb a korreláció abszolútértéke.

A legegyszerűbb a PEARSON-féle korreláció. A  $\xi_1$  és  $\xi_2$  valószínűségi változók  $\rho$  korrelációja:

$$\rho = \frac{\mathcal{M}[(\xi_1 - \mathcal{M}[\xi_1])(\xi_2 - \mathcal{M}[\xi_2])]}{\mathcal{D}(\xi_1)\mathcal{D}(\xi_2)}$$

Természetesen a fenti képletben az elméleti szórások és várható értékek általában nem ismertek, ezért a minta korrelációját így definiáljuk:

$$r = \frac{1}{n\sigma_x\sigma_y} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)$$

Főnt  $\sigma$  a *korrigálatlan* tapasztalati szórást,  $\mu$  a számtani közepet jelöli. Ez a becslés feltételezi, hogy a minták normális eloszlású sokaságból származnak. Más eloszlású változók korrelációját a fenti képlet kis mintaszám esetén jellemzően alábecsli.

A PEARSON-féle korreláció legfontosabb tulajdonságai:

- Kizárólag *lineáris* kapcsolatok keresésére szolgál. Ha a két változónk között nemlineáris függvénykapcsolat van, a korrelációjuk ennek ellenére sem lesz  $1$ .

- Rendkívül érzékeny a kiugró adatokra. Akár csak egyetlen hibás mérési adat is teljesen eltérítheti az értékét.
- Csak intervallum- és arányskálájú adatokra alkalmazható. Multiplikatív mennyiségekre csak logaritmusaik korrelációja számítható.

Egy másik, kissé bonyolultabb mérőszám a SPEARMAN-féle korreláció:

- Bármilyen monoton növekvő vagy csökkenő kapcsolatot megtalál, azonban a nem monoton függvénykapcsolatokat nem jelzi.
- Kevésbé érzékeny a kiugró mérési adatokra, így bármilyen eloszlású mintára alkalmazhatjuk.
- Nem számít közvetlenül átlagot, így ordinális skálájú változókat is bevonhatunk.

Számítása a következő: Az  $x_i$  mintákat növekvő sorba rendezzük. A minta  $\mathcal{R}(x_i)$  rangszáma legyen az a szám, ahányadik helyet foglalja a minta a sorban. Több egyforma minta esetén sorszámaikat átlagoljuk, és az lesz mind egyik minta rangszáma. Hasonlóan számítjuk az  $y_i$  minta rangszámát. A SPEARMAN-féle korreláció ekkor megegyezik  $\mathcal{R}(x_i)$  és  $\mathcal{R}(y_i)$  PEARSON-féle korrelációjával. Speciálisan, ha egyik változóban sem fordul elő két egyforma érték, akkor a következő, egyszerűbb képlet is használható:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum [\mathcal{R}(x_i) - \mathcal{R}(y_i)]^2}{n(n^2 - 1)}$$

Fenti két korrelációs mérőszámon kívül természetesen rengeteg másikat dolgoztak ki a statisztikusok. Ezeknek mind eltérő alkalmazási lehetőségeik vannak.

Az, hogy mekkora korrelációt tekintünk elég erősnek, szubjektív kérdés. Mégis belevihetünk egy csipetnyi objektivitást, ha statisztikai próba alá vetjük. Ismert, hogy ha a két változó független, normális eloszlású, akkor a következő próbastatisztika  $n - 2$  szabadságfokú  $t$ -eloszlást követ:

$$t = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

A próbastatisztikát az általunk *előre* meghatározott szignifikanciaszinthez tartozó kritikus értékkel (amelyet pl. Excelben kiszámítunk) összehasonlítva megtudhatjuk, hogy a korreláció jelez-e *szignifikáns* összefüggést.

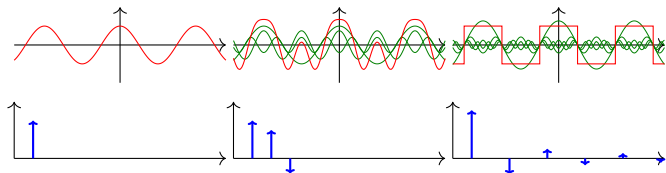
Fontos, hogy a korreláció csak összefüggés kimutatására alkalmas; attól még, hogy két változó összefügg, nem következik, hogy közöttük ok-okozati kapcsolat lenne.

# Kilencedik előadás

## Függvények spektruma

### IX.1. FOURIER-sor

Tekintsük az első függvényt a IX.1. ábrán! Ez nem okoz nekünk nagy lelki törést, hiszen a jól ismert koszinusz-függvényről van szó. Vezessük be rá alatta a következő, egyszerűsített ábrázolást! A vízszintes tengelyen mérjük föl a koszinusz periódusának reciprokát (*frekvencia*). Innen húzzunk egy olyan hosszú függőleges vonalat, mint amekkora a koszinuszfüggvény legnagyobb kitérése (*amplitúdó*). Ezt az ábrázolást a függvény *spektrumának* nevezzük.



IX.1. ábra. Néhány periodikus függvény spektruma

A középső függvény kicsit ravaszabb, hiszen ez valójában három különböző frekvenciájú és amplitúdójú koszinusz-hullám (az ábrán zöld) összegzésével jött létre. Ennek a spektruma értelemszerűen három vonalból fog állni, a rövidebb periódusú (nagyfrekvenciás) hullámok vonalai az ábrán jobbra helyezkednek el. A függvény képe igen bonyolult, így élünk a gyanúperrel, hogy bármilyen *periodikus* függvény előállítható szinus- és koszinusz-hullámok összegeként. Ezt a függvény *FOURIER-sorának* nevezzük. A  $T$  periódusú  $s$  függvény fölírható tehát végtelen sok szinus- és koszinuszfüggvény összegeként:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + 2b_n \sin \frac{2\pi n t}{T}$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_c^{c+T} s(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt \quad b_n = \frac{1}{T} \int_c^{c+T} s(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt$$

Kimutatható, hogy páros függvényeknek minden  $b_n$ , a páratlan függvényeknek pedig minden  $a_n$  együtthatója zérus. Az  $a_n$  és  $b_n$  együtthatókat kiszámítva bármilyen periodikus függvény spektrumát is megrajzolhatjuk (hiszen az összegzett függvények frekvenciája  $n/T$ ), például a harmadik ábrarészen látható, két konstans érték között váltakozó ún. *négyszögfüggvényét* is. Vigyázzunk, hogy ilyenkor végtelen sok szinuszhullámot összegzünk, azaz valójában a spektrumban végtelen sok, egyre apróbb vonal látható.

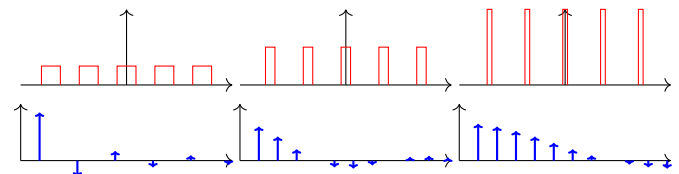
Legyen  $\Pi(t) = 1$ , ha  $|t| < 1/2$ , és  $\Pi(t) = 0$ , ha  $|t| > 1/2$ ! Ekkor a  $T$  periódusú,  $A$  amplitúdójú,  $\tau$  szélességű négyszögimpulzusokból álló függvény leírható így:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A \Pi\left(\frac{t-kT}{\tau}\right)$$

A FOURIER-együtthatók tehát:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt = \frac{A}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos \frac{2\pi n t}{T} dt = \frac{A}{\pi n} \sin \frac{\pi n \tau}{T}$$

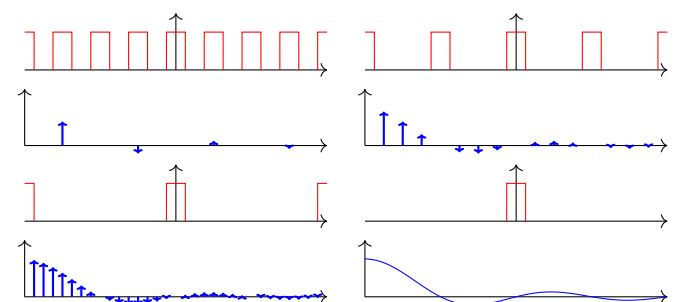
A spektrum vizsgálata számunkra a képfeldolgozás során bizonyult hasznosnak. A legtöbb fényképen a képhibából adódó zajok jellemzően kis kiterjedésűek (gyakran csak egy pixel), de nagy intenzitásúak (jelentősen eltérő szín). A IX.2. ábrán egyre keskenyebb, de egyre magasabb négyszögfüggvények spektrumait láthatjuk. Feltűnő, hogy a kép zajgyanús keskeny jelek spektruma (ahogy a fenti képletben  $\tau/T$  csökken) számos nagy amplitúdójú és frekvenciájú összetevőt tartalmaz. Tehát a *nagyfrekvenciás komponensek a spektrumban hirtelen, rövid változást, gyakran zajt jeleznek*.



IX.2. ábra. Jel szélességének hatása a spektrumra

### IX.2. FOURIER-transzformáció

Igen ám, de a valóságban a fényképek a legritkábban sem írhatók le periodikus függvényekkel, és a zajok sem mindig ismétlődnek. Vegyünk egy négyszögfüggvényt, és kezdjük el a benne található jeleket egymástól távolítani! Azt tapasztaljuk, hogy a spektrum vonalai periódus növelésével egyre sűrűbben helyezkednek el (hiszen a nagy periódusú jelek kisfrekvenciásak). Határhelyzetben a tranziens (nem periodikus) jel spektruma vonalasból folytonossá válik (IX.3. ábra).



IX.3. ábra. Jel ritkításának hatása a spektrumra

A tranziens függvények spektruma tehát egy folytonos függvény, míg a periodikusaké vonalas. A nem periodikus függvények spektrumát számító eljárás neve *FOURIER-transzformáció*:

$$\mathcal{F}\{s(t)\} = S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

Ne ijedjünk meg az elsőre (sőt harmadikra is) rémesnek látszó képlettől! Ha tudjuk, hogy  $e^{-i\vartheta} = \cos \vartheta - i \sin \vartheta$ , akkor kiderül, hogy páros függvények esetén (ahol csak koszinuszos tagok vannak a *FOURIER*-sorban) az eredmény valós szám lesz. Például a négyszögimpulzus spektruma (ahol  $\text{sinc } x = \sin(\pi x)/\pi x$  a *szinusz kardinális* függvény):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-i2\pi f t} dt = \\ &= A \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos(2\pi f t) dt = A \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f} = A\tau \text{sinc}(\tau f) \end{aligned}$$

Ha valamelyik függvénynek a spektrumát ismerjük, abból előállítható az eredeti függvény is *inverz FOURIER-transzformáció*val:

$$\mathcal{F}^{-1}\{S(f)\} = s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi f t} df$$

Figyeljünk, hogy az  $S$  függvény változója már nem a  $t$  idő vagy távolság, hanem az  $f$  frekvencia! A gyakorlatban a *FOURIER*-transzformációt számításigényessége miatt az *FFT* (*fast FOURIER transform*) eljárással szoktuk közelíteni. *FOURIER*-transzformáció csak azokra a függvényekre végezhető el, amelyek abszolútértékének függvény alatti területe véges ( $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt$  konvergens legyen).

### IX.3. Képszűrések

Az előbb megismert kellemetlen matematikát most gyakorlatba ültetjük. A *IX.4.* ábrán látható légifelvétel igazi állatorvosi ló. Van rajta él (a híd szélei), nagyfrekvenciás jelek (szőlő, erdő) és nagy kiterjedésű sima felület (folyó).

Ha csak a nagy kiterjedésű tárgyakat, tendenciákat vizsgálná, akkor például kiszámíthatjuk a kép spektrumát. A spektrumot beszorozzuk egy olyan függvénnyel, amely az alacsony frekvenciákon 1 (azaz változatlanul hagyja), magas frekvencián 0 (azaz eltünteti). A függvényt *átviteli függvénynek*, az így megvalósított szűrést *aluláteresztő* vagy *felülvágó szűrőnek* hívjuk. A kép szűrt spektrumából inverz *FOURIER*-transzformációval visszaállítható a szűrt kép (*IX.5.* ábra). Bár a kép homályos lett, a nagy tendenciák világosan látszanak, a finom mintázat kevésbé zavar bizonyos képfeldolgozó eljárásokat.

Ennek az ellentéte a *alulvágó* vagy *felülváteresztő szűrő*\*, amelynek átviteli függvénye épp a küszöbfrekvencia alatt nulla, a fölött egy (azaz csak a nagyfrekvenciás jeleket engedi át). Az ilyen képek (*IX.6.* ábra) éleket és finom mintázatok kiemelésére (lásd a szőlő és az erdő igen eltérő mintázatát) alkalmasak.

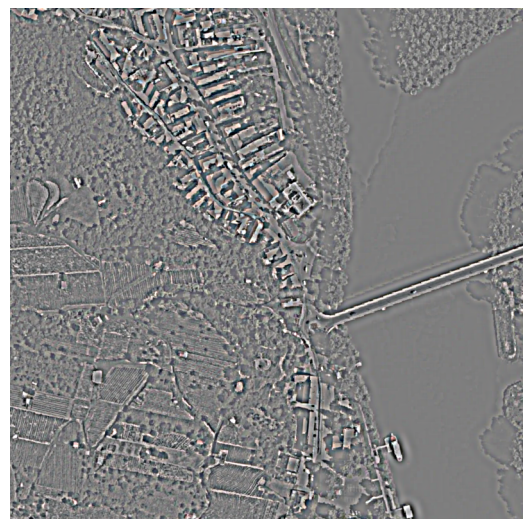
\* Ugyanezt a technológiát használjuk a hangszin szabályozásához, amikor is a magas és mély felhangokat a mintában egymástól elkülönítjük, és azokat külön erősítjük-gyengítjük.



IX.4. ábra. A mintaterület



IX.5. ábra. Az aluláteresztő szűrő simítja a képet



IX.6. ábra. Az alulvágó szűrő mutatja a finom mintázatokat

# Tizedik előadás

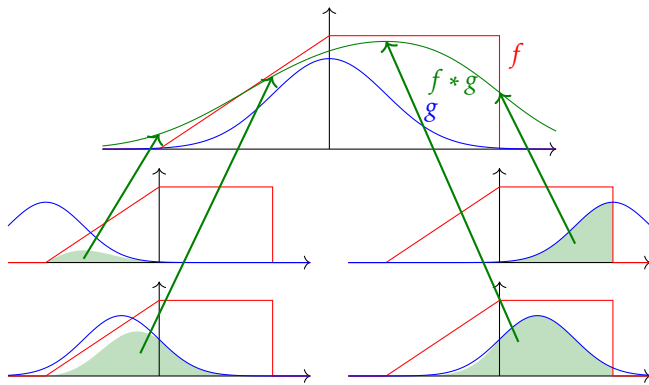
## Konvolúciós szűrők

### X.1. Konvolúció

Az  $f$  és  $g$  függvények konvolúciója:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

A hallgatók elrettentésére kiválóan alkalmas képlet szemléletes magyarázata a X.1. ábrán látható. A  $g$  függvény képét végigtoljuk a vízszintes tengely mentén és végig képezzük az  $f \cdot g$  szorzatot. A szorzat grafikon alatti területe lesz a konvolúció eredménye az adott helyen.



X.1. ábra. Konvolúció

A konvolúció számos unalmas tulajdonsággal rendelkezik: kommutatív ( $f * g = g * f$ ), asszociatív ( $((f * g) * h = f * (g * h))$ ), disztributív ( $((f + g) * h = f * h + g * h)$ ). Számunkra a legérdekesebb viszont a konvolúció tétele:

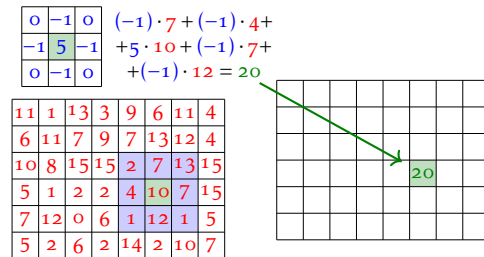
$$\mathcal{F}\{g(t)h(t)\} = \mathcal{F}\{g(t)\} * \mathcal{F}\{h(t)\}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{G(f)H(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{G(f)\} * \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\}$$

A felső egyenlet azt állítja, hogy két függvény szorzatának a spektruma megegyezik a két függvény spektrumainak konvolúciójával. Az alsó egyenlet szerint két függvény spektrumának szorzatát inverz FOURIER-transzformálva a két spektrum inverz FOURIER-transzformáltjának konvolúcióját kapom. Utóbbi rendkívül hasznos számunkra: míg eddig a képeink spektrumát csak úgy tudtuk manipulálni, hogy FOURIER-transzformáltuk a képet, a spektrumot megszoroztuk az átviteli függvénnyel, majd visszatranszformáltuk a képet. Ezek szerint ezt sokkal egyszerűbben megoldhatjuk: elegendő a képet az átviteli függvény inverz FOURIER-transzformáltjával konvolválni. Ennek számításigénye jóval csekélyebb.

A képfeldolgozás során azonban a jelet csak adott pixelekben ismerjük. Ennek konvolúciója úgy történik, hogy az átviteli függvény inverz FOURIER-transzformáltját leképezzük egy ún. kernelmátrixba. A kernelt végigmozgatjuk

a kép fölött, és a kernelben található számokat páronként összeszorozzuk a képen található értékekkel, végül összegzünk (X.2. ábra).



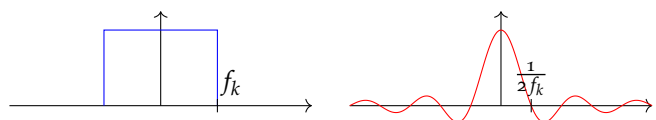
X.2. ábra. Diszkrét konvolúció

### X.2. Simító szűrők

A nagyfrekvenciás jeleket a legelegánsabban egy felülvágó szűrővel tüntethetjük el. Az átviteli függvény a frekvenciatartományban legyen 1 (azaz engedjen át minden jelet), ha  $|f| < f_k$  küszöbfrekvencia, egyébként értéke legyen 0 (azaz tompítsa el minden jelet). Ez tehát egy négyszögfüggvény. Szeretnénk megkapni azt a kernelt, amellyel konvolválva a képet az  $f_k$ -nál nagyobb frekvenciákat eltüntetjük. Ehhez a négyszögfüggvény inverz FOURIER-transzformáltjára lesz szükségünk (X.3. ábra):

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\Pi\left(\frac{f}{2f_k}\right)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{f}{2f_k}\right) e^{i2\pi ft} df =$$

$$= \int_{-f_k}^{f_k} \cos(2\pi ft) df = \frac{\sin(2\pi f_k t)}{\pi t} = 2f_k \text{sinc}(2f_k t)$$

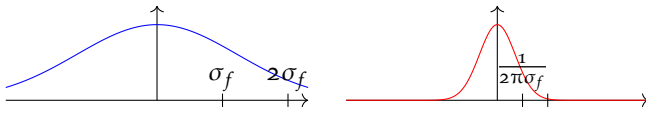


X.3. ábra. Aluláteresztő szűrő átviteli függvénye és kernelje

A felülvágó kernel tehát a szinusz kardinális függvény lesz. Mivel a kép kétdimenziós, ha a két irányban azonos mértékben szeretnénk a frekvenciát vágni, a kernelműnk  $4f_k^2 \text{sinc}(2f_k \Delta x) \text{sinc}(2f_k \Delta y)$  értékekkel kell föltöltenünk, ahol  $\Delta x$  és  $\Delta y$  a kernel középpontjától vett koordinátaeltérés. Így készült a IX.5. ábra is. A módszer problémája, hogy (amint az az ábrán is látszik), a szinusz kardinális hullámai csak lassan csillapodnak, nem közelíthetők nullával, így pontos szűréshez igen hosszú kernelre van szükségünk.

A probléma megkerülésére találták ki a GAUSS-szűrőt. Ennek átviteli függvénye (a már jól ismert haranggörbe) nem hirtelen vágja le a nagy frekvenciákat, hanem az egyre nagyobb frekvenciájú jeleket egyre jobban tompítja. Ennek inverz FOURIER-transzformáltja szintén haranggörbe (X.4. ábra):

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-\frac{f^2}{2\sigma_f^2}}\right\} = \sqrt{2\pi\sigma_f^2} e^{-2\pi^2\sigma_f^2 t^2}$$



X.4. ábra. GAUSS-szűrő átviteli függvénye és kernelje

A haranggörbe előnye, hogy gyorsan belesimul a nullába, így a kernel középpontjától távol eső elemek elhagyhatók, a kernel kis méretű lesz. A GAUSS-szűrt képek tulajdonságai nagyon hasonlítanak a felülvágó szűrővel készítettetekhez (X.5. ábra).



X.5. ábra. GAUSS-szűrt kép

Jóval egyszerűbb az ún. box-szűrő vagy átlagszűrő, amelynek kerneljében minden szám egyforma, azaz gyakorlatilag a pixelek mozgóátlagát számítja. A simítás mértéke kizárólag a kernel méretétől függ. Ez valójában egy négyszögfüggvénnyel történő konvolúció, azaz az átviteli függvény egy szinusz kardinális (lásd IX.3. ábra jobb alsó sarka). Erről aztán mindent elmondhatunk, csak ezt nem, hogy egy adott frekvencia fölött mindent levágna. Ezért láthatunk például a X.6. ábrán szemkifolyatós mintázatot a háztetők között.

### X.3. Élkiemelő szűrők

Az eddigi szűrők mind simították a képet. Most próbáljuk meg kiemelni az éleket! Tudjuk, hogy az éleket a felülvágó szűrők őrzik meg. Legyen  $H$  egy felülvágó szűrő átviteli függvénye, és  $h = \mathcal{F}^{-1}\{H\}$  az ő kernelje! Ha az eredeti  $g$  képből kivonjuk annak kisfrekvenciás összetevőit,  $g - g * h$  csak nagyfrekvenciás jeleket tartalmaz, azaz



X.6. ábra. Box-szűrt kép

alulvágott. Legyen  $\delta$  egy olyan kernel, amelynek minden eleme 0, kivéve a középsőt, amely 1. Világos, hogy  $g * \delta = g$ , azaz nem változtatja meg a képet. Ebből az alulvágott kép  $g * \delta - g * h = g * (\delta - h)$ . Azaz bármilyen aluláteresztő szűrő kerneljéből megkaphatjuk a neki megfelelő felülvágó kernelt, ha minden elemét ellentétére váltunk, majd a középső elemhez egyet hozzáadunk.

A IX.6. ábrán látjuk, hogy az alulvágó szűrők jellemzően kontrasztszegény képet eredményeznek, ezért közvetlenül nem használjuk. Helyette az alulvágott kép  $k$ -szorosát hozzáadjuk az eredeti képhez:  $g + k * g * (\delta - h) = g * [(k + 1)\delta - kh]$ . A gyakorlatban  $k \approx 5$ , ez határozza meg az élesítés mértékét.

A X.7. ábra készítéséhez a GAUSS-szűrő kerneljét megszoroztuk mínusz öttel, majd a középső értékhez hatot hozzáadtunk. Ezzel konvolválva a képet, az eredeti képhez képest jóval kontrasztosabb eredményünk lett. A leglátványosabb kiemelés a szőlőben látható. Azonban az ilyen élkiemelő szűrők hátránya, hogy az eredeti színeket erősen torzítják. Érdekes például megfigyelni a folyóban a fák árnyékai körül a vékony, világos kontúrt, amely az eredeti képen nem volt ott, vagy hogy az egyszínű háztetők színátmenetessé változtak.



X.7. ábra. Élesített kép

# Tizenegyedik előadás

## Éldetektálás

### XI.1. Élmegőrző szűrők

A korábban megismert simító szűrők mind elkenték az éleket. Igaz, GAUSS-szűrő ezt a többihez képest kisebb mértékben teszi, hiszen az átenged valamennyit a nagyfrekvenciás jelekből. De mit tehetek, ha szeretném megőrizni a nagyobb éleket, de közben szeretném kiszűrni a képzajt? Erre a problémára találták ki a *mediánszűrőt*. Ez úgy működik, hogy a kernel alá eső pixelek mediánját írja a kernel közepébe.\*

A módszer előnye, hogy ahol él van, az értékek egy irányba növekednek, így a medián éppen a kernel közepe alá esik, a képen nem változtatunk. A hirtelen kiugró érték (zaj) viszont mindig szélsőérték lesz, sohasem fogja a mediánszűrő kiválasztani (XI.1. ábra). A szűrő erősségét a kernel méretével tudom szabályozni. A szűrő hátránya, hogy konvolúciós kernellel nem írható le, így sem a spektrumra gyakorolt hatása nem ismert, sem nem alkalmazhatók a konvolúciónál megismert tulajdonságok (pl. a szűrők sorrendjének megváltoztatása így más képet eredményez, kernelje nem vonható össze más szűrőkével).



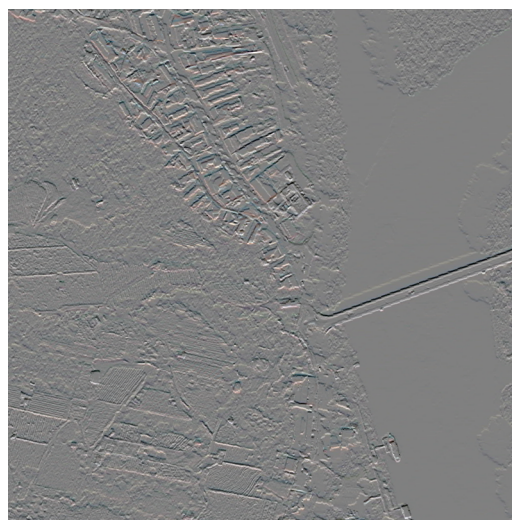
XI.1. ábra. Mediánszűrt kép

### XI.2. Élkereső szűrők

Képen él ott található, nagy a differenciálhányados értéke. Mivel több dimenzióban vagyunk, valójában a gradiensre van szükségünk. Azonban a gradiens egy vektor,

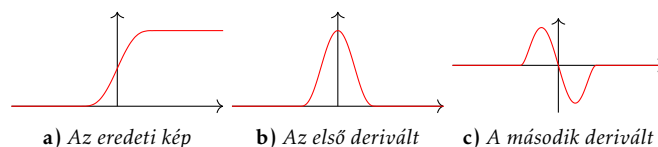
\* A mediánszűrő a rangszűrők speciális esete, más rangszűrőknél lehetőség van pl. mindig a harmadik legnagyobb pixel értékét bemásolni.

annak egyszerre csak egyik koordinátáját tudom a raszterbe beírni. Az első koordináta az  $y$ , a második az  $x$  tengellyel párhuzamos éleket fogja kiemelni (pl. a XI.2. ábrán a vízszintes éleket látjuk). Lehetőség van azonban a gradiens abszolútértékét is beírni a raszterbe, ez viszont nem lehetséges egy lépésben: külön-külön kernellel kell számolnunk a gradiens két koordinátáját, majd végül PITAGORASZ-tétellel számíthatjuk a vektor hosszát.



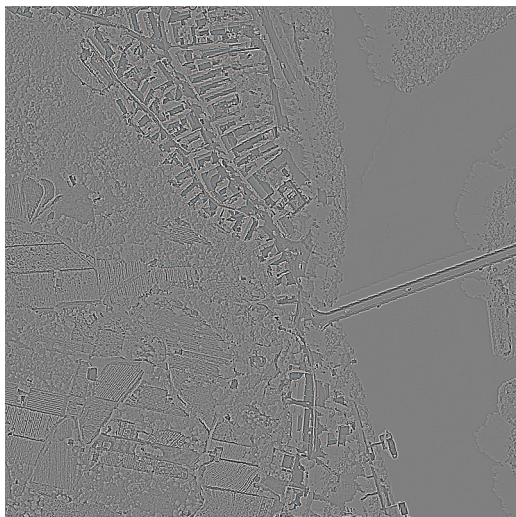
XI.2. ábra. A gradiensvektor függőleges komponense

Az él ott található, ahol a gradiens értéke a legnagyobb, azonban ezt a helyet nem triviális megtalálni. Azonban tudjuk, hogy a szélsőértékekben a derivált nulla és pont itt vált előjelet (XI.3. ábra). Számítsuk ki a gradiens megváltozását! Egy  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvényen LAPLACE-operátornak nevezzük azt a skalárt eredményező műveletet, amely a gradiens koordinátáinak megfelelő irányú parciális deriváltjait összegzi. Jele:  $\nabla^2 f$ . Két dimenzió esetén a LAPLACE-operátor jelentése tehát  $\partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2$ . A LAPLACE-operátor irányuktól függetlenül egyforma mértékben találja meg az éleket (XI.4. ábra).

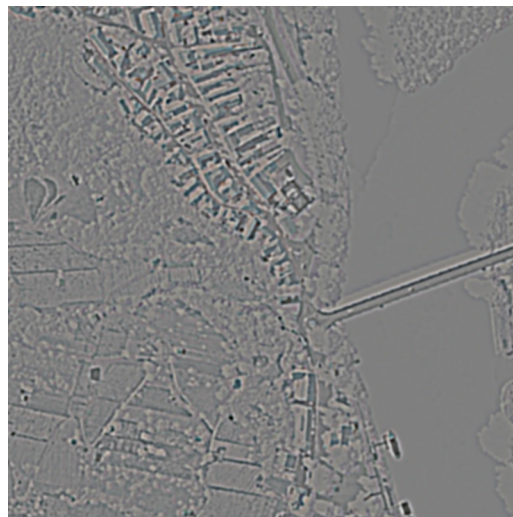


XI.3. ábra. Jel tulajdonságai az élnél

Az ábrákon látható, hogy a deriváláson alapuló élkeresés rendkívül zajérzékeny. Ezért képünkön az élkeresés előtt szinte mindig érdemes valamilyen simítószűrőt alkalmazni. Két lehetőségünk van, a mediánszűrő és a GAUSS-szűrő. Előbbi előnye, hogy a fontosabb éleket nem



XI.4. ábra. LAPLACE-szűrt kép



XI.5. ábra. LoG-szűrt kép

keni szét, így azok könnyebben észrevehetőek. A GAUSS-szűrő használatának viszont az az előnye, hogy a deriválással egy lépésben is elvégezhető, mert:

$$\frac{d}{dt}(f * g) = f * \frac{dg}{dt}$$

E szerint a képet nem is kell deriválnom, hanem elegendő a GAUSS-szűrő kerneljét deriválni, amelynek számítás-igénye elenyésző. E szerint a GAUSS-szűrt kép gradiensét számító kernel képlete:

$$\begin{aligned} \nabla g &= \left( \frac{\partial A e^{-B(x^2+y^2)}}{\partial x}; \frac{\partial A e^{-B(x^2+y^2)}}{\partial y} \right) = \\ &= (-2AB e^{-B(x^2+y^2)}x; -2AB e^{-B(x^2+y^2)}y) \end{aligned}$$

A gradiensvektor koordinátáit újból deriválva, majd a deriváltakat összegezve:

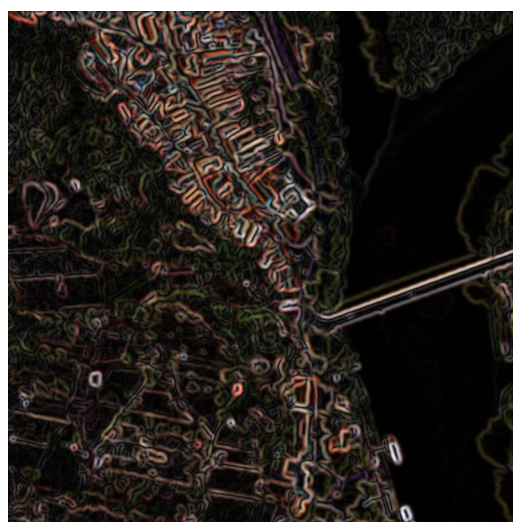
$$\nabla^2 g = -4AB e^{-B(x^2+y^2)}(1 - Bx^2 - By^2)$$

A GAUSS- és LAPLACE-szűrőket kombináló kernelt LoG (*Laplacian of Gaussian*) szűrőnek nevezzük. A LoG-szűrt képeken az eredeti élek a fehér és fekete vonalak között futnak (XI.5. ábra).

Hasonló elven működik a CANNY-féle éldetektor. Első lépésben GAUSS-szűrővel elsimítjuk a zajt, majd kiszámítjuk ennek gradiensét (tulajdonképpen a vektor hosszát). Mivel a GAUSS-szűrő az éleket elkeni, ezért a gradiensszűrő eredményén az élek igen szélesek lesznek (XI.6. ábra). Az éldetektor úgy vékonyítja el a vonalakat, hogy a helyi maximumokat tekinti az él helyének.

### XI.3. Gyakori szűrők kerneljei

A gyakorlatban, ha nincs nagy pontossági igényünk, a szűrők kerneljeit egyszerű kernelekkel közelítjük. Az interneten számos gyakori szűrőhöz találhatunk olyan  $3 \times 3$ ;  $5 \times 5$  és  $7 \times 7$  méretű előregyártott kerneleket, amelyek egyszerű egész számokkal vagy törtekkel közelítik az elméletben számított kernelt. Néhány ilyen kernelt látunk a XI.7. ábrán.



XI.6. ábra. GAUSS-szűrt kép gradiensének abszolútértéke

Általánosságban elmondható, hogy a simító és élesítő szűrők kerneljeiben az elemek összege egy. A simító szűrők kerneljeiben negatív szám nem, vagy csak a kernel közepétől távol fordul elő; az élkimelőkében a kernel közepéhez közel negatív számok vannak, azonban a kernel közepe itt is pozitív. A deriváláson alapuló és az alulvágó szűrők kerneljeiben az összeg nulla. Az ilyen kernelekkel történő konvolúció gyakran ad negatív számot eredményül, ezért az eredményhez konstans értéket szoktunk hozzáadni. Ez okozza az ilyen képek szürkés háttérszínét.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Box

b) GAUSS

c) LAPLACE

d) Élkimelő

XI.7. ábra. Néhány gyakori szűrő egyszerűsített kernelje

# Tizenkettedik előadás

## Digitális mintavételezés

### XII.1. A DIRAC-delta

Tekintsünk egy olyan valószínűségi változót, amelynek várható értéke és szórása is nulla! Ez a változó tehát 1 valószínűséggel fog nullát fölvenni. Ennek a sűrűségfüggvényét *DIRAC- $\delta$* -nak nevezzük:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \neq 0 \\ \infty & \text{ha } x = 0 \end{cases} \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Valójában ilyen függvény nem is létezik, azonban határértékként előállíthatjuk: vegyünk egy egységnyi területű négyszögimpulzust az origóban, majd az impulzus hosszát (a terület változatlanul tartása mellett) csökkentsük minden határon túl! A *DIRAC- $\delta$*  haszna, hogy ki tudja választani bármilyen jelből annak  $t_0$  időpontban fölvetett értékét, azaz mintát tudunk venni a jelből.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t_0) dt = \\ &= f(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \end{aligned}$$

Mellesleg a *DIRAC- $\delta$*  spektruma konstans, azaz minden frekvenciát egyformán tartalmaz:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cos(2\pi f t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot 1 dt = 1$$

E mellett még érdekes tulajdonság, hogy a  $\delta$ -val történő konvolúció a függvényeket eltolja:

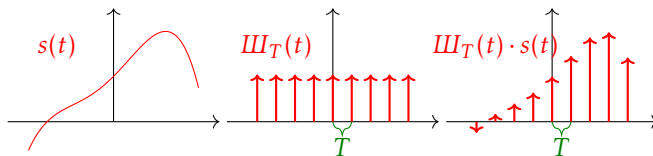
$$\delta(t - t_0) * s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_0) s(t - \tau) d\tau = s(t - t_0)$$

### XII.2. Mintavételi tétel

A digitális mintavételezés során egyelő távolságoként, periodikusan veszünk mintát, azaz egy  $T$  periódusú *DIRAC- $\delta$*  sorozattal szorozzuk a jelet ([XII.1. ábra](#)):

$$\mathcal{W}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

\* Ez az oka annak, hogy a hirtelen nagy intenzitású impulzusok, mint például a villámlás valamennyi frekvencián egyformán zavarnak a rádióadás.



XII.1. ábra. Analóg jel ( $s$ ) digitalizálása  $\delta$ -sorozattal ( $\mathcal{W}_T$ )

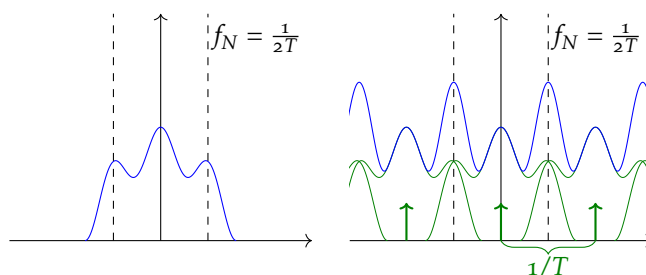
Mivel periodikus függvényről van szó, ezért a *DIRAC- $\delta$*  sorozat spektruma vonalas:

$$\mathcal{F}\{\mathcal{W}_T(t)\} = \frac{1}{T} \mathcal{W}_{1/T}(f)$$

Vizsgáljuk meg a mintavételezett adatsorunk spektrumát! (Alább kihasználjuk a konvolúció tételét, miszerint a szorzat spektruma a spektrumok konvolúciója.)

$$\mathcal{F}\{\mathcal{W}_T(t)s(t)\} = \frac{1}{T} \mathcal{W}_{1/T}(f) * \mathcal{F}\{s(t)\}$$

A [XII.2. ábrán](#) látható, hogy a digitalizált jel spektruma konvolúciót szenved egy  $\delta$ -sorozattal (ami egy periodikus eltolás), így bizonyos nagyfrekvenciás jelek eltolódva alacsonyfrekvenciás jellé váltak. Világos, hogy csak akkor nem történik ilyen jelenség, ha jelünk spektrumának felső határfrekvenciája kisebb, mint az  $f_N = 1/2T$  *NYQUIST-frekvencia*. Ebből következik, hogy a mintavétel  $T$  távolságát úgy kell megválasztani, hogy az  $f_N$  *NYQUIST-frekvenciánál* nagyobb frekvenciájú, azaz  $2T$ -nél rövidebb periódusú jelek ne forduljanak elő.<sup>†</sup> Ez a mintavételi tétel.



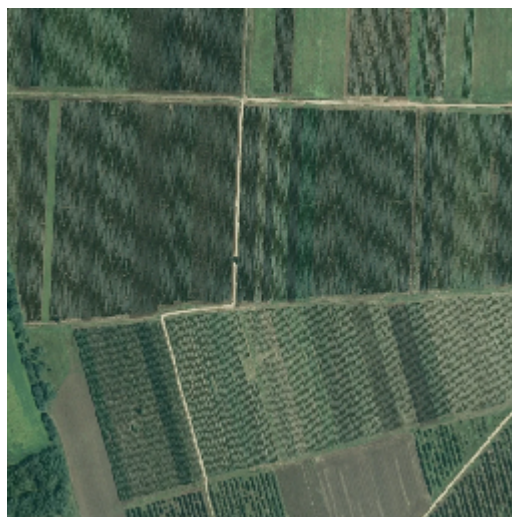
XII.2. ábra. Eredeti analóg és mintavételezett jel spektruma

Gyakorlati példát a [XII.3. ábrán](#) látunk, ahol a szőlőültetvény nagyfrekvenciás mintázata a b) jelű, alacsony

<sup>†</sup> Az ember a 20 kHz-nél magasabb hangokat nem hallja, így a hangfelvételekről bátran elhagyhatók. Ezek szerint (a hang felülvágó szűrését követően) másodpercenként 40 000 mintavételre lesz szükségünk. A biztonság kedvéért a gyakorlatban kis ráhagyással dolgozunk: a CD-ken 44 100, a kazettákon és DVD-ken 48 000 mintát tárolunk másodpercenként. A számítástechnika mindkét szabványt átörökölte, a közöttük történő konverzió örök fejfájás a hanggal foglalkozóknak.



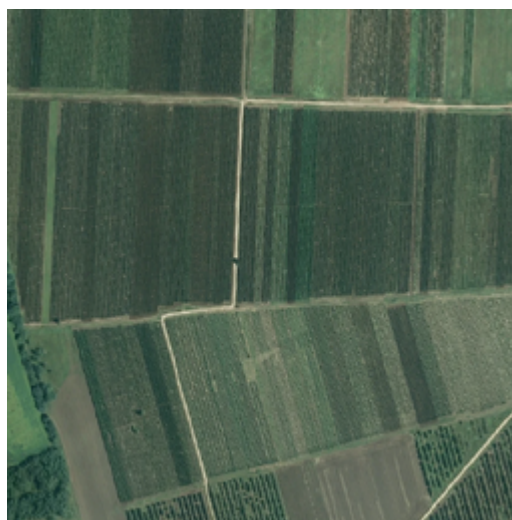
a) A szőlőültetvény



b) A felbontást túlságosan lecsökkentve moiré-jelenséget tapasztalunk



c) Felülvágó szűrővel simítva



d) Így már bátran csökkenthetjük a felbontást

### XII.3. ábra. A mintavételi tétel következménye

felbontású (alulmintavételezett) képen ún. moiré-jelenséget\*, azaz nem kívánt alacsonyfrekvenciájú mintázatot mutat. Megoldás lehet a mintavétel előtt felülvágó szűrőt alkalmazni, hogy a nem kívánatos nagyfrekvenciás jelet eltüntessük vagy a mintavétel távolságát úgy csökkenteni, hogy a nagyfrekvenciás jelek még átvihetők legyenek.

A megfelelő felbontás kiválasztása tehát gondolkodást igényel. Ha szükségünk van részletes adatokra, akkor mindenképp nagy felbontásban kell dolgoznunk, a felbontást úgy megválasztva, hogy a legkisebb, még ábrázolni kívánt terepelem legalább  $2 \times 2$  pixelt fedjen le. Ha generalizálni kívánunk, akkor viszont szükséges képünkön, domborzatmodellünkön egy simító szűrést végrehajtani, hogy a

\* Moiré-jelenséget a térképészetben leggyakrabban nem képfeldolgozásnál, hanem nyomdai feldolgozásnál tapasztalunk. Itt az okozza a nem kívánt mintázat megjelenését, hogy a világos színeket nem világosabb festékkel, hanem finom vonal- vagy pontmintával állítjuk elő, amely egybeolvad a papír fehér színével. Azonban ha több szín egymásra nyomásával keverjük ki a színt; a különböző színű nyomólemezekon található hasonló, de nem tökéletesen egyforma mintázat egymással vizuális kölcsönhatásba lép. A jelenséget a nyomólemezekon található mintázat elforgatásával előzik meg. A *moiré* francia szó jelentése selyem.

részleteket elmoszuk. Ez után viszont átmintavételezhetjük a képet kisebb felbontásra, hiszen a túl sűrűn mintavételezett adat csak fölöslegesen foglalja a tárolót; a c) és d) képek között szabad szemmel nem látunk különbséget. A térinformatikai szoftverekben a felbontás megváltoztatása során a felülvágó szűrés (azaz a sinc-szal történő konvolúció) *LÁNCZOS-kernel* néven található meg.

## XII.3. Zárszó

A félév során három matematikai terület, a geometria, a statisztika és a jelfeldolgozás térképészetben hasznos alkalmazásait tekintettük át. Az itt ismertetett módszerek kézi végigszámolása ma már nem szükséges, hiszen ezek beépültek a legtöbb térinformatikai programba. Azonban a vetületek, kategorizálási módszerek és képszűrési eljárások alkalmazása során tisztában kell lennünk a „fekete doboz” belsejében zajló számításokkal, különben a figyelmen kívül hagyás nem kívánt hibákhoz vezethet. Az egyes eljárások korlátait ismerve bölcsebben választhatjuk meg az adatainknak leginkább megfelelő módszert a rengeteg menüpont közül.

## A. függelék

### Szóbeli vizsga tételsora

Egy kis segítség következik a tételek kidolgozásához (mi merre található). Ha ugyanaz a fejezet több tételnél is átfedően szerepel, akkor a közös anyagra általában más megvilágításból van szükség.

| Első anyagrész                                                               | Második anyagrész                                                     |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| 1. Trigonometrikus függvények és legfontosabb tulajdonságaik (I.1; I.2; I.4) | Hisztogram (VII.1)                                                    |
| 2. Háromszögek ismeretlen oldalainak és szögeinek számítása (I.2; I.3)       | Adatok csoportosítása (VII.2; VII.3)                                  |
| 3. Műveletek vektorokkal és mátrixokkal (II.2; II.3)                         | Statisztikai próbák (VIII.1)                                          |
| 4. Koordináta-rendszerek fajtái (II.1; II.4)                                 | Korreláció (VIII.2)                                                   |
| 5. Vektoriális szorzat, determináns (III.1)                                  | Függvények spektruma (IX.1; IX.2)                                     |
| 6. Lineáris egyenletrendszerek megoldása (III.2)                             | FOURIER-transzformáció alkalmazása (IX.2; IX.3)                       |
| 7. Trigonometria a földmérésben (IV.1)                                       | Simítószűrők működése, fajtái (X.2)                                   |
| 8. Lejtő paramétereinek számítása (IV.2; IV.3)                               | Képek élesítésének módszerei (X.3)                                    |
| 9. Valószínűségi változók és mérési skáláik (V.1; V.3)                       | A konvolúció és a DIRAC- $\delta$ fogalma, tulajdonságai (X.1; XII.1) |
| 10. Az eloszlás fogalma, példák (V.2; V.4)                                   | A mediánszűrő tulajdonságai (XI.1)                                    |
| 11. Középértékek, kvantilisek (VI.1; VI.3)                                   | Gradiens- és LAPLACE-szűrők (XI.2)                                    |
| 12. Szórás, maximum likelihood (VI.2; VI.4)                                  | Mintavételi tétel (XII.2)                                             |