



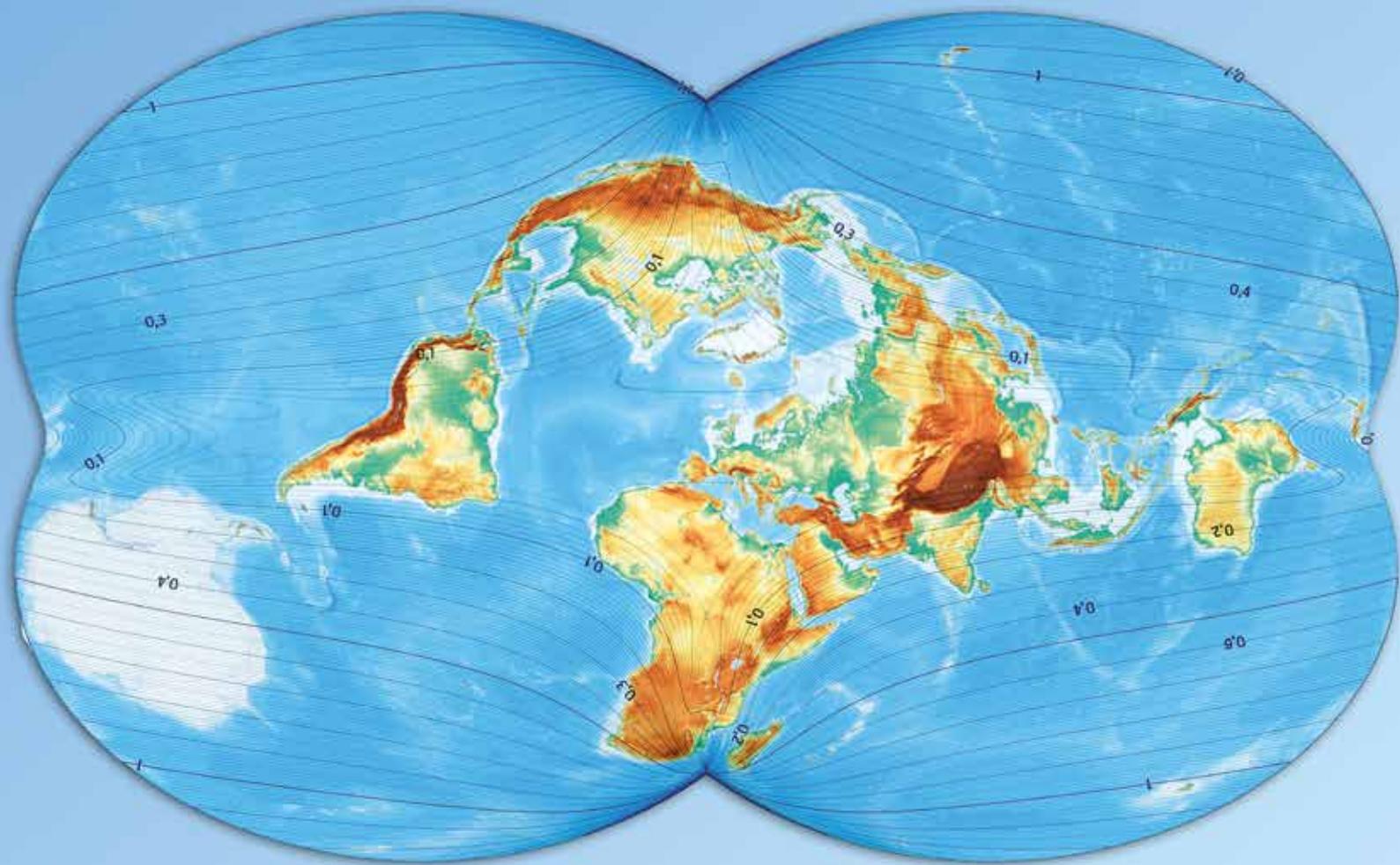
Kartographische Nachrichten

*Journal of Cartography and Geographic
Information*

Herausgegeben von der DGfK e. V. –
Gesellschaft für Kartographie und Geomatik
Organ der DGfK, SGK und ÖKK

3

2017



R. Böhm et al.:
**Erdabbildung
in neuer Form**

K. Kerkovits:
Kegeleentwürfe

G. Pápay:
**Eckerts Karten-
wissenschaft**

Indexed in Scopus
67. Jahrgang

**KIRSCH
BAUM**

Vorteilhafteste flächentreue Kegellentwürfe für unregelmäßig begrenzte Gebiete

Optimizing equal-area conic and pseudo-conic projections for irregular areas

Kerkovits, Krisztián, Budapest (Ungarn)

Obwohl eine Theorie zu den vorteilhaftesten Abbildungen existiert, gab es nur wenige Versuche, passende Entwürfe zu entwickeln. Das resultiert vor allem daraus, dass die analytische Lösung dieses Problems meistens mit komplizierten Differentialgleichungen zweiter Ordnung verbunden ist, die sehr schwer lösbar sind. In diesem Beitrag wird eine Lösung am Beispiel der flächentreuen Kegellentwürfe für kleinmaßstäbige Karten beschrieben. Sie zeigt, wie die beste Abbildung durch numerische Verfahren sogar für unregelmäßig begrenzte Gebiete angenähert werden kann. Verzerrungsmaße der ermittelten, vorteilhaftesten Abbildungen werden für verschiedene Bereiche auch tabellarisch ausgegeben. Ebenso werden im Beitrag Vorschläge für ihre Verwendung unterbreitet.

■ Schlüsselwörter: vorteilhafteste Abbildung, kleinmaßstäbige Karte, Kegellentwurf, Flächentreue, numerische Verfahren, Oberflächenintegral, Simpson-Regel

Although the theory of the minimum-distortion projections is well known, there were only a few attempts to develop such maps. This is mostly due to the fact that a solution of this problem usually connects to differential equations, which are difficult to solve. In this paper, the author shows how to approximate the best projection even for irregular areas using numeric methods by the example of equal-area and pseudo-conic projections for small-scale maps. Distortion values of optimal solutions are displayed in a table for several regions. Furthermore, the paper suggests various applications of their usage.

■ Keywords: optimal projection, small-scale map, pseudo-conic projection, equal-area, numerical methods, surface integral, Simpson's rule

Einleitung und Erklärungen

Wird ein Teil der kugelförmigen Erde auf eine Ebene abgebildet, erscheinen unvermeidlich Verzerrungen. Diese Verzerrungen werden visuell bemerkbar, sobald die längste Dimension des abgebildeten Gebiets 3.500 km übersteigt (Frančula 1971). Damit Entfernungen, Fläche und Winkel auf der Karte genau gemessen werden können oder Umrisse wie die von Meeren und Kontinenten formtreu wiedergegeben werden, muss ein vorteilhafter Netzentwurf gewählt werden. Deshalb besteht eine Aufgabe der Kartenwissenschaften darin, Abbildungen mit minimaler Verzerrung zu finden. Das ist besonders bei kleinmaßstäbigen Karten wichtig, in denen das Kartengebiet besonders groß ist (Kontinente, größere Länder, Meere usw.). Da die Differenz zwischen der Kugel und dem Rotationsellipsoid in kleinen Maßstäben gering ist, wird hier als Erdgestalt eine Einheitskugel angenommen.

Alle Flächen, die auf der Karte dargestellt werden, haben verschiedene Formen und liegen auf verschiedenen Breiten der Erde. Für diese Bereiche müssen also verschiedene Entwürfe entwickelt werden. Manche

Kartenthemen benötigen Projektionen mit keiner Winkelverzerrung. Seit Tschebyschow (1856) ist das Problem des besten winkeltreuen Netzentwurfs gelöst. Von anderen Kartenthemen (z. B. politische Landkarten, statistische Karten) werden hingegen Abbildungen ohne Flächenverzerrung gefordert. Diese Abbildungen werden *äquivalente* oder *flächentreue Abbildungen* genannt. Es existieren Forschungen und Publikationen zum Thema der besten äquivalenten Abbildungen (Adams 1945; Dyer, Snyder 1989).

Das Theorem von Tissot (1878) besagt, dass ein unendlicher kleiner Kreis auf der Kugel fläche in der Ebene stets als eine Ellipse abgebildet wird. Wenn der Halbmesser des sphärischen Kreises die Einheit bildet, heißen die Halbachsen der Ellipse *maximale* und *minimale Längenverzerrung* oder einfach *Hauptmaßstäbe* (im Folgenden mit a , b bezeichnet). *Flächenverzerrung* oder *Flächenmaßstab* wird das Flächenverhältnis zwischen dieser Ellipse und dem Einheitskreis genannt: $p := ab$.

Zunächst wird der Begriff *Verzerrungsmaß um einen Punkt* definiert. Das Verzerrungs-

maß ist eine Zahl, mit der die Abweichung von einem verzerrungsfreien Zustand beschrieben wird. Das Verzerrungsmaß um verzerrungsfreie Punkte beträgt null. Die Verzerrung wird auf die Hauptmaßstäbe bezogen. Es gibt viele Möglichkeiten, solche Verzerrungsmaße zu entwickeln. Hier wird das sogenannte *Kriterium von Airy-Kawraiski* benutzt, das auch für große Gebiete geeignet ist (Frančula 1971; Györfly 1990). Die zugehörige Formel ist (Kawraiski 1934; Bajewa 1987):

$$\varepsilon^2 := \frac{1}{2}(\ln^2 ab + \ln^2 a/b) = \ln^2 a + \ln^2 b \quad (1)$$

Das *Verzerrungsmaß* für ein Gebiet kann auf unterschiedliche Weisen definiert werden: Die Methode von Tschebyschow (1856) behauptet, dass „der Fehler“ der Karte „der Fehler“ um den Punkt mit dem höchsten Verzerrungsmaß ist. Das *Kriterium vom Minimaxtyp* ist also der maximale absolute Wert des Verzerrungsmaßes und es wird vorwiegend im Feld der Geodäsie verwendet.

Es wurde von Airy (1861) und Meschtscherjakow (1968) ein Kriterium des quadratischen Mittelwertes der Verzerrungsmaße definiert. Das Verzerrungsmaß ist ein stetiger

Zahlenwert, der über das Gebiet zu integrieren ist:

$$E := \sqrt{\frac{1}{G} \int_G \varepsilon^2 dG} \quad (2)$$

G bedeutet dasjenige Abbildungsgebiet, das auf der Karte dargestellt wird.

Das so definierte Kriterium heißt *Kriterium vom Variationstyp*. In diesem Aufsatz wird dieses Kriterium so angewendet wie in den meisten kartographischen Publikationen.

Mit dem Begriff *vorteilhafteste* oder *beste Abbildung für ein Gebiet G* wird ein Netzentwurf bezeichnet, dessen Verzerrungsmaß für das Gebiet innerhalb einer Entwurfsgruppe am kleinsten ist.

Numerische Integration über unregelmäßig begrenzte Gebiete

Anwendung des numerischen Integrals, um die Verzerrungsmaße zu berechnen

Das gewählte Verzerrungsmaß für das ganze Abbildungsgebiet ist ein Integral, das mit den folgenden Schwierigkeiten verbunden ist:

- Die Integranden sind fast immer kompliziert. Es ist häufig schwer oder unmöglich, sie vollständig zu lösen. Deshalb soll die Stammfunktion numerisch angenähert werden.
- In manchen Entwürfen gibt es Punkte, in denen das Verzerrungsmaß unendlich groß ist. Umgebungen von Punkten, in denen die Verzerrungen unendlich groß sind, müssen von der Berechnung ausgeschlossen werden.
- Zwar gibt es Gebiete, über welche das Oberflächenintegral einfach berechnet werden kann (z. B. über ein sphärisches Viereck), aber in der Praxis sind die Flächen, die abgebildet werden, unregelmäßig. Deshalb müssen sie über regelhaft definierte Gebiete angenähert werden.

Komplizierte Integranden lassen sich mittels Rechner problemlos durch numerische Verfahren berechnen. Wenn nicht die ganze Kugeloberfläche angezeigt werden soll, können Punkte, in denen Verzerrungen unendlich groß werden, außerhalb des angezeigten Bereiches verlegt werden. Unregelmäßig begrenzte Gebiete sind weiterhin problematisch.

Verzerrungsmaße für unregelmäßig begrenzte Gebiete wurden schon früher untersucht (Kimerling, Overton, White 1995). Die Winkelverzerrungen wurden hier für den Bereich der Vereinigten Staaten (ohne Alas-

ka und Hawaii) in zwei Projektionen verglichen. Das Oberflächenintegral wurde dabei über zwei Verfahren berechnet:

Zunächst wurde die untersuchte Fläche mit einem regelmäßigen Gitternetz überdeckt. Alle Netzpunkte außerhalb des Untersuchungsgebietes wurden nicht berücksichtigt. Danach wurde das Verzerrungsmaß der inneren Netzpunkte gesammelt. (Es ist die Verallgemeinerung der Mittelpunkt-Regel für Oberflächenintegrale. Eine ähnliche Methode wurde für den Bereich von Kroatien auf dem Referenzellipsoid von Tutić (2009) angewendet.) Der Nachteil dieser Lösung besteht darin, dass auch ein Netzpunkt, der fast im Berechnungsgebiet liegt, nicht berücksichtigt werden darf. Das Gegenbeispiel ist ein Netzpunkt innerhalb des Gebietes, bei dem die Umgebung nahezu komplett außerhalb des Untersuchungsgebietes liegt, jedoch der Zahlenwert voll in die Berechnung eingeht. Daher muss ein sehr feines Gitter verwendet werden, um hinreichende Genauigkeit zu erzielen.

Die andere Möglichkeit bot die Monte-Carlo-Integration. Dabei wurden Zufallspunkte im Gebiet gewählt, welche auf der sphärischen Fläche mit gleicher Wahrscheinlichkeit gelegen waren. Danach wurden die Verzerrungsmaße an den Zufallspunkten ausgewertet. Der Vorteil dieses Verfahrens ist, dass das Gebiet nicht mit regelmäßigen Flächen genähert wird. Diese Berechnungen können allerdings nicht wiederholt werden. Monte-Carlo-Integration ist auch bekannt für ihre langsame Konvergenz, es müssen also viele Punkte berücksichtigt werden.

Weiterhin ist die Arbeit von Canters (2001) zu erwähnen. Seine Europakarte wurde auch durch ein Verfahren ähnlich der Monte-Carlo-Integration (über zufällig gewählte Distanzen im Gebiet) optimiert. Eine parallel laufende Forschung zeigt, dass mit diesem Verfahren entwickelte Abbildungen in Grenznähe höhere Verzerrungen haben, da sich die optimierten Strecken zwischen zufälligen Punktpaaren stärker um das Zentrum der Abbildung scharen.

Simpson-Regel für Oberflächenintegrale

Das bestimmte Integral einer stetig ableitbaren Funktion von einer Variablen kann viel effektiver mit der sogenannten Simpson-Regel als mit den oben erwähnten Verfahren berechnet werden. Hier wird die Funktion mit einer Parabel genähert. Das Integral der Parabel wird einfach berechnet (Press et al. 2002):

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \approx \frac{\beta - \alpha}{6} \left(f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + f(\beta) \right) \quad (3)$$

Das Verfahren kann dadurch verfeinert werden, dass das Gebiet in m gleich große Segmente geteilt wird und diese dann getrennt genähert werden:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^m \int_{\alpha + (i-1)\frac{\beta - \alpha}{m}}^{\alpha + i\frac{\beta - \alpha}{m}} f(x) dx \approx \frac{\beta - \alpha}{6m} \left(f(\alpha) + 4 \sum_{i=1}^m f\left(\alpha + \frac{(2i-1)(\beta - \alpha)}{2m}\right) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f\left(\alpha + \frac{j(\beta - \alpha)}{m}\right) + f(\beta) \right) \quad (4)$$

Dieses Ergebnis kann auch für Doppelintegrale benutzt werden. Integrale werden nacheinander genähert:

$$\iint_{\alpha \eta}^{\beta \xi} f(x, y) dx dy \approx \frac{\beta - \alpha}{6m} \int_{\eta}^{\xi} \left(f(x, \alpha) + 4 \sum_{i=1}^m f(x, y_i) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x, y_j) + f(x, \beta) \right) dx \quad (5)$$

wobei

$$y_i = \alpha + \frac{(2i-1)(\beta - \alpha)}{2m} \quad y_j = \alpha + \frac{j(\beta - \alpha)}{m} \quad (6)$$

Danach kann das verbleibende Einfachintegral wie oben berechnet werden.

F sei ein sphärisches Viereck, das von den Meridianen λ_w und λ_o und von den Parallelen φ_s und φ_N begrenzt ist. Die Simpson-Regel kann auch für ein Oberflächenintegral auf F angewendet werden. Zuerst muss das sphärische Oberflächenintegral in ein Doppelintegral verwandelt werden. (Deswegen muss der Integrand mit dem Kosinus der Breite multipliziert werden.)

$$\iint_F f(\varphi, \lambda) dF = \iint_{\varphi_s \lambda_w}^{\varphi_N \lambda_o} f(\varphi, \lambda) \cos \varphi d\lambda d\varphi \approx \frac{\varphi_N - \varphi_s}{6m} \int_{\lambda_w}^{\lambda_o} \left(f(\varphi_s, \lambda) \cos \varphi_s + 4 \sum_{i=1}^m f(\varphi_i, \lambda) \cos \varphi_i + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(\varphi_j, \lambda) \cos \varphi_j + f(\varphi_N, \lambda) \cos \varphi_N \right) d\lambda \quad (7)$$

wobei

$$\varphi_i = \varphi_s + \frac{(2i-1)(\varphi_N - \varphi_s)}{2m} \quad \varphi_j = \varphi_s + \frac{j(\varphi_N - \varphi_s)}{m} \quad (8)$$

Das rechte Ende von Formel (7) ist das Integral eines Betrags, das wegen der Linearität des Integrals abgetrennt werden kann:

$$\iint_F f(\varphi, \lambda) dF \approx \frac{\varphi_N - \varphi_s}{6m} \left(\int_{\lambda_w}^{\lambda_o} f(\varphi_s, \lambda) \cos \varphi_s d\lambda + 4 \sum_{i=1}^m \int_{\lambda_w}^{\lambda_o} f(\varphi_i, \lambda) \cos \varphi_i d\lambda + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \int_{\lambda_w}^{\lambda_o} f(\varphi_j, \lambda) \cos \varphi_j d\lambda + \int_{\lambda_w}^{\lambda_o} f(\varphi_N, \lambda) \cos \varphi_N d\lambda \right) \quad (9)$$

Die Integrale können per Summanden mit verschiedener Unterteilung genähert werden. Dies ist bedeutsam auf der Kugelfläche, wo sich die Distanz einer gegebenen Längendifferenz mit der Annäherung an die Pole verkleinert.

Näherung eines unregelmäßig begrenzten Gebietes

Es wird ein geschlossener Streckenzug auf der Kugelfläche angenommen. Die Stützpunkte sind durch Koordinaten (φ, λ) beschrieben. Der Einfachheit halber werden die Stützpunkte nicht durch Orthodrome, sondern durch Kurven mit konstantem Verhältnis von Längen- und Breitendifferenz verbunden. Der resultierende Fehler ist klein, vorausgesetzt, dass Nachbarpunkte nicht zu weit voneinander entfernt sind (Chamberlain, Duquette 2007). Zudem werden solche Dateien in einer quadratischen Platkarte z. B. in GIS-Software angezeigt, indem diese Kurven dann zu Geraden mutieren. Wird eine sphärische Geometrie digitalisiert, werden die Kurven ebenso abgetastet.

Mit mehreren derartigen Streckenzügen können auch komplizierte, mit inselhaften Aussparungen behaftete und disjunkte Gebiete beschrieben werden. Der Antimeridian soll von diesen Streckenzügen nicht gekreuzt werden. (Es ist keine Beschränkung, da jedes Gebiet durch den Antimeridian geschnitten werden kann.) Somit verhalten sich die sphärischen Koordinaten und Streckenzüge gleich wie in der Ebene.

Der Begrenzungsrahmen des Gebiets kann einfach über die Extremwerte der Koordinaten bestimmt werden. Ein sphärischer Ab-

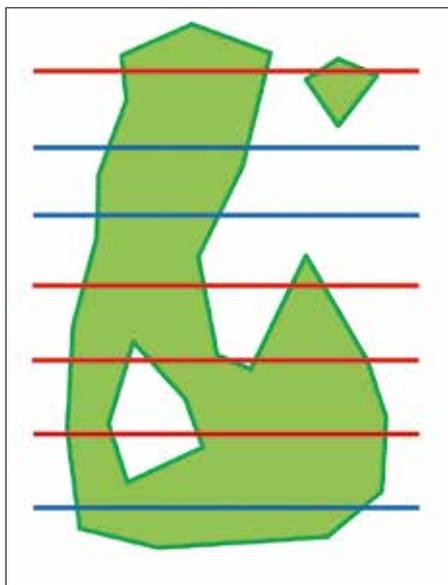


Abb. 1: Das Gebiet wird von den roten Breitenkreisen mehrmals gekreuzt

stand r wird nach Maßgabe der Genauigkeit gewählt und definiert den Grad der Unterteilung. Mit der bekannten nord-südlichen Gebietserstreckung kann die Abschnittszahl berechnet werden: $m \approx (\varphi_N - \varphi_S) / r$ (m wird zur Ganzzahl gerundet).

Die Formel (9) kann jetzt angewendet werden, aber λ_w und λ_o sind keine Konstanten, sondern sie hängen von der Breite π ab. Bei konkaven Vielecken kann eine Breite außerdem mehrere Abschnitte haben, die getrennt berücksichtigt werden müssen (Abb. 1). Schnittpunkte können anhand der vorhergehenden Betrachtungen einfach mittels linearer Interpolation berechnet werden. Die Integrale über die Länge werden zur Anwendung der Simpson-Regel auch aufgeteilt. Die empfohlene Teilungszahl ist in etwa $(\lambda_o - \lambda_w) \cos \varphi / r$. Die Unterteilung bleibt damit nahezu unabhängig von der Breitenkreislage.

Es stellt sich heraus, dass der Unterschied zwischen dem so berechneten numerischen Integral der Einsfunktion und der bekannten Oberfläche bei glatt begrenzten Flächen (z. B. Afrika) schon bei $r = 20^\circ$ lediglich 1 % beträgt. Mehr Netzpunkte werden von Gebieten mit „rauen“ Umrissen (z. B. Nordamerika) gebraucht. Bei $r = 4^\circ$ beträgt der Fehler nur mehr rund 0,1 %, was für diesen Zweck ausreichend ist. Die Genauigkeit, aber auch die Rechenlast erhöht sich bei einer Verdichtung der Teilung signifikant.

Bestimmung der besten Entwürfe für ein unregelmäßig begrenztes Gebiet

Die Integrale in der Formel (2) können für unregelmäßig begrenzte Gebiete berechnet werden. Zunächst werden Entwürfe gesucht, deren Verzerrungsmaß am geringsten ist. Eine exakte Findung des vorteilhaftesten Entwurfs nötigt zu einer übermäßig komplizierten partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Ein Einsatz allgemeiner und flexibler Abbildungsformeln wird deshalb von Canters (2001) empfohlen. Solche Formeln enthalten oft Polynome, die eine beliebige Funktion annähern können.

Wird die beste Abbildung innerhalb einer bestimmten Entwurfsgruppe gesucht, dann sollen Formeln die Eigenschaften dieser Gruppe mathematisch ausdrücken. Im nächsten Abschnitt werden solche allgemeinen Abbildungsgleichungen für jede Gruppe der flächentreuen Kegeltentwürfe beschrieben, um Beispiele zu geben. Konstanten (Koeffizienten) in den Formeln werden numerisch optimiert. Hierbei wird nach der Empfehlung von Canters der müheloseste

Weg, das sogenannte *Downhill-Simplex-Verfahren* (Nelder, Mead 1965), genutzt.

Zur Lösung wurde ein Rechenprogramm erstellt, welches die Konstanten für Gebiete optimiert und dabei das Verzerrungsmaß für die beste Abbildung berechnet (Tab. 1). Das Programm kann die berechneten Entwürfe gleichzeitig als PNG-Datei abbilden (Abb. 3-7).

Allgemeine Formeln flächentreuer Kegeltentwürfe

Über äquivalente Kegeltentwürfe im Allgemeinen

Werden Breitenkreise in einem Netzentwurf als (nicht zwingend konzentrische) Kreisbögen abgebildet, wird der Entwurf *Kegeltentwurf* genannt. Solche Abbildungen werden gewöhnlich über Polarkoordinaten definiert (Abb. 2). In den Formeln bedeutet λ nicht die geographische Länge, sondern die Längendifferenz zu einem beliebigen Mittelmeridian. Es wird der Polabstand anstatt der Breite in die Formeln eingesetzt (Winkel sind generell in Radiant angegeben.):

$$\delta := \frac{\pi}{2} - \varphi \tag{10}$$

Die ableitbare Funktion, die für jeden Breitenkreis seine Halbmesser auf der Ebene zuordnet, ist das Halbmessergesetz $\rho(\delta)$. Die Abstandsfunktion zwischen dem Kreismittelpunkt und dem Koordinatenursprung wird mit $s(\delta)$ bezeichnet. $t(\delta) := s(\delta) - \rho(\delta)$ soll immer streng monoton fallend sein. Der Zentriwinkel $\vartheta(\delta, \lambda)$ ist eine streng monoton steigende ungerade Funktion von λ , aber beliebige ableitbare Funktion von δ . Die allgemeinen Abbildungsgleichungen sind:

$$x = \rho \sin \vartheta \quad y = s - \rho \cos \vartheta = t + \rho - \rho \cos \vartheta \tag{11}$$

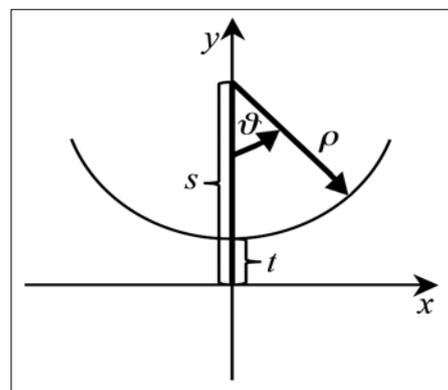


Abb. 2: Polarkoordinaten in den Kegeltentwürfen

Ein Kegeltentwurf kann mit (ρ, ϑ, s) oder mit (ρ, ϑ, t) komplett beschrieben werden. Die Hauptmaßstäbe der Kegeltentwürfe lassen

sich durch Differentialgeometrie ausdrücken (Bugajewski, Snyder 1995):

$$a = \frac{a' + b'}{2} \quad b = \frac{a' - b'}{2} \quad (12)$$

wobei

$$a' = \sqrt{h^2 + k^2 + 2hk \sin \Theta} \quad b' = \sqrt{h^2 + k^2 - 2hk \sin \Theta} \quad (13)$$

h und k sind die Maßstäbe in Richtung der Parallelkreise und der Meridiane. Θ ist der Winkel zwischen Linien bestimmter geographischer Breiten und Längen in der Ebene:

$$h = \frac{\rho}{\sin \delta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \lambda} \quad k = \frac{\frac{d\rho}{d\delta} - \cos \delta \frac{d\vartheta}{d\delta}}{\sin \Theta} \quad (14)$$

$$\cot \Theta = \frac{\frac{d\delta}{d\delta} \sin \vartheta + \rho \frac{\partial \vartheta}{\partial \delta}}{\frac{d\delta}{d\delta} \cos \vartheta - \frac{d\rho}{d\delta}}$$

Danach kann das Verzerrungsmaß für alle Gebiete nach der zuvor beschriebenen Methode berechnet werden. Komplizierte Ableitungen können auch numerisch errechnet werden. Noch eine wichtige Bedingung ist, dass der Flächenmaßstab in äquivalenten Abbildungen überall 1 sein muss:

$$p = ab = hk \sin \Theta = \frac{\rho}{\sin \delta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \lambda} \left(\frac{d\rho}{d\delta} - \frac{d\delta}{d\delta} \cos \vartheta \right) = 1 \quad (15)$$

In den Abbildungen 3–7 erscheinen grüne Isolinien. Von ihnen wird die maximale Winkelverzerrung gezeigt:

$$\omega = 2 \arcsin \frac{a - b}{a + b} \quad (16)$$

Das genannte Rechenprogramm zeichnet diese Isolinien, weil sie in einer optimalen Abbildung ungefähr parallel zur Gebietsgrenze verlaufen sollten (Tschebyschow 1856; Meschtscherjakow 1968; Canters 2001). Also lässt sich das Ergebnis auch visuell überprüfen.

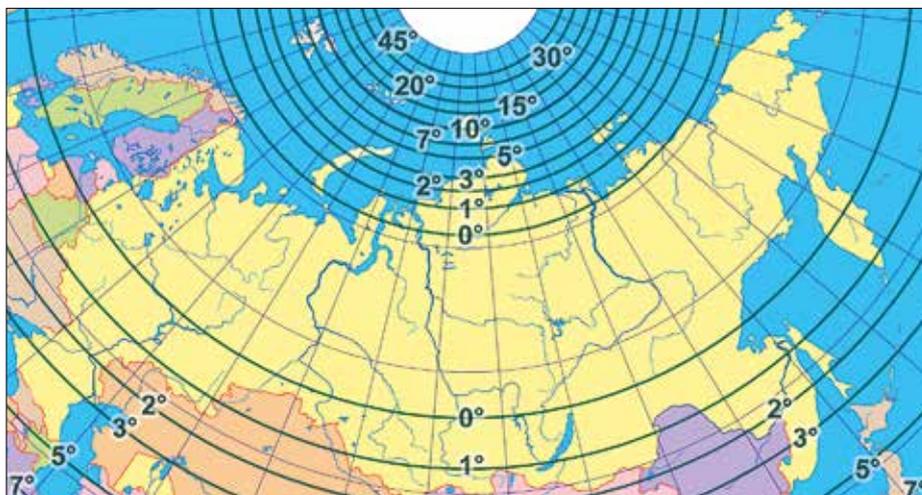


Abb. 3: Vorteilhafteste äquivalente echte Kegelabbildung für Russland mit Isolinien maximaler Winkelverzerrung

Kegelentwürfe werden oft für in den mittleren Breiten liegende Gebiete angewendet. Wegen ihrer Anpassungsfähigkeit werden sie als eine gute Näherung an Idealabbildungen (Abbildungen mit geringstem Verzerrungsmaß) empfohlen.

Kegelentwürfe gliedern sich in folgende Gruppen:

- Echte Kegelentwürfe
- Unechte bzw. nichtechte Kegelentwürfe
 - Pseudokonische Abbildungen
 - Polykonische Abbildungen
 - Pseudopolykonische Abbildungen.

Echte Kegelentwürfe

Im Falle, dass in einem Kegelentwurf Meridiane geradlinig und Parallelkreise konzentrische Kreisbögen sind, welche die Meridiane rechtwinklig schneiden und konstante Maßstäbe haben, spricht man von *echten Kegelentwürfen*. Mathematisch ausgedrückt:

$$\vartheta = n\lambda \quad s = const. \quad (17)$$

wobei $0 < n < 1$ die *Kegelkonstante* ist. Aus Formel (15) ergibt sich, dass die Projektion äquivalent ist, wenn:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\delta}{2} + c} \quad (18)$$

Die Herleitung befindet sich in Wagner (1949).

Es ist die sogenannte *Albers-Projektion*. Diese Abbildung kann zwei längentreue Breitenkreise haben (Abb. 3). Damit die Rolle der Konstanten n und c leichter verstanden werden kann, können die mit den längentreuen Breitenkreisen φ_1 und φ_2 (in diesem Fall jetzt nicht als Polabstand definiert!) ausgedrückt werden:

$$n = \frac{\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2}{2} \quad c = \frac{4}{n} \cos^2 \frac{\varphi_1}{2} \cos^2 \frac{\varphi_2}{2} \quad (19)$$

Zwei Konstanten werden bei der Suche nach dem besten flächentreuen Kegelentwurf optimiert. In den meisten Fällen resultiert ein Entwurf mit Polarlinien. Im Fall $c = 0$ ($\varphi_1 = \pi / 2$ bzw. $\varphi_2 = \pi / 2$) ergibt sich ein Polarpunkt im Nordpol, aber eine Polarlinie im Südpol. Bei Entwürfen mit Polarpunkt bleibt nur eine Konstante zu optimieren.

Pseudokonische Projektionen

Falls Längengrade nicht als Geraden abgebildet werden, Breitenkreise sich jedoch als konzentrische Kreisbögen erhalten ($s = const.$), wird von einer pseudokonischen Projektion gesprochen. Diese Abbildungen sind nie überall rechtwinklig, sie haben immer Winkelverzerrungen, aber es können äquivalente Entwürfe erstellt werden. Der Zentriwinkel kann bei Flächentreue aus dem Halbmessergesetz durch die Formel (15) berechnet werden:

$$\int \frac{\rho}{\sin \delta} \left(\frac{d\rho}{d\delta} - 0 \right) d\vartheta = \int d\lambda \quad (20)$$

$$\vartheta = \frac{\sin \delta}{\rho \frac{d\rho}{d\delta}} \lambda \quad (21)$$

Hier sowie in den Formeln (27) und (30) ist die Integrationskonstante 0, weil $\vartheta(\delta, \lambda)$ eine ungerade Funktion von λ sein muss.

Das Halbmessergesetz bleibt zunächst unbestimmt. Es wird daher $\rho(\delta)$ durch ein quadratisches Polynom ersetzt, welches zu einer bestmöglichen Abbildung numerisch genähert werden kann. Polynome höheren Grades fördern die Genauigkeit meist nicht wesentlich.

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \delta + \rho_2 \delta^2 + \dots \quad (22)$$

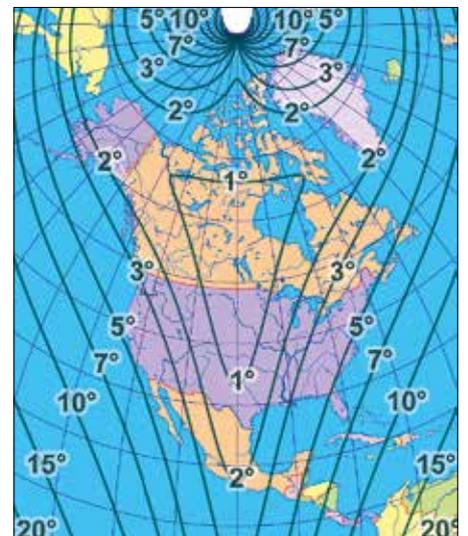


Abb. 4: Nordamerika in einem äquivalenten pseudokonischen Entwurf mit Polen als Punkte

Im Zähler des Zentriwinkels ist der Sinus des Polabstands in den Polen immer null. Somit hat der Entwurf zwei Polarpunkte. Es stellt sich heraus, dass diese Abbildungen oft trotz Optimierung unvorteilhaft (Tab. 1) und ähnlich dem Bonne'schen Entwurf sind (Abb. 4). Das Konzept kann aber mit erzwungenen Polarlinien verbessert werden: Der Nenner des Zentriwinkels wird dabei Produkt aus linearem Polynom und Sinus des Polabstands.

$$\rho \frac{d\rho}{d\delta} = (\rho_1 + \rho_2 \delta + \dots) \sin \delta \quad (23)$$

Dies ist als separierbare Differentialgleichung erster Ordnung einfach zu lösen. ρ_0 ist die Integrationskonstante:

$$\rho = \sqrt{2(\rho_0 - \rho_1 \cos \delta + \rho_2 (\sin \delta - \delta \cos \delta) + \dots)} \quad (24)$$

Somit kann der Grenzwert von Formel (21) gegen die Pole beim Kürzen des Bruches mit dem Sinus berechnet werden (Abb. 5). Bei $\rho_0 = \rho_1$ wird einer der Pole als Punkt und der Gegenpol als Linie abgebildet. Mit diesem Halbmessergesetz lassen sich Abbildungen mit Polarpunkt besser ausführen.

Polykonische Abbildungen

Es wird über *polykonische Abbildungen* gesprochen, wenn die folgenden Bedingungen vorliegen (Haines 1981):

$$\rho = S_n \cot \varphi \quad t = S_m \varphi \quad (25)$$

wobei S_m und S_n beliebige Konstanten rund 1 sind.

Da $\vartheta(\delta, \lambda)$ unbestimmt ist, muss es bei Forderung der Flächentreue durch die Formel (15) ausgedrückt werden:

$$\int \frac{S_n \cot \varphi \left(\frac{S_n}{\sin^2 \varphi} + S_m \cos \vartheta - \frac{S_n \cos \vartheta}{\sin^2 \varphi} \right) d\vartheta = \int d\lambda \quad (26)$$

$$S_n (S_n \vartheta + S_m \sin \vartheta \sin^2 \varphi - S_n \sin \vartheta) = \lambda \sin^3 \varphi \quad (27)$$

Die implizite Funktion lässt sich nicht analytisch lösen, sondern braucht eine Näherung über numerische Verfahren. Der Äquator wird nur als Grenzwert dargestellt. Obwohl sich dieser Absatz nicht mit Weltkarten beschäftigt, mag dieser Grenzwert – wenn auch selten – bei Kontinentalkarten Anwendung finden.

$$y = 0 \quad S_m x + \frac{S_n}{6} x^3 - \lambda = 0 \quad (28)$$

Kubische Gleichungen können entweder mit Cardanischen Formeln oder über numerische Verfahren gelöst werden. Pole werden in diesem Entwurf als Punkte abgebildet. Dieser Entwurf ist bekannt als einer der ungünstigen für Weltkarten, aber er liefert überraschend befriedigende Resultate für einige Gebiete (Abb. 6 und Tab. 1).

Pseudopolykonische Entwürfe

Alle sonstigen Kegelabbildungen heißen *pseudopolykonische Entwürfe*. Im Falle, dass ρ und t bzw. s bekannt sind, kann ϑ durch



Abb. 6: Flächentreue polykonische Projektion für die EU

die Formel (15) ausgedrückt werden, damit die Abbildung äquivalent wird:

$$\int \frac{\rho}{\sin \delta} \left(\frac{d\rho}{d\delta} - \frac{ds}{d\delta} \cos \vartheta \right) d\vartheta = \int d\lambda \quad (29)$$

$$\frac{d\rho}{d\delta} \vartheta - \frac{ds}{d\delta} \sin \vartheta = \frac{\lambda \sin \delta}{\rho} \quad (30)$$

bzw.

$$\frac{d\rho}{d\delta} \vartheta - \left(\frac{dt}{d\delta} + \frac{d\rho}{d\delta} \right) \sin \vartheta = \frac{\lambda \sin \delta}{\rho} \quad (31)$$

Es ist eine implizite Funktion, die durch numerische Methoden (z. B. Newton-Verfahren) gelöst werden kann. Falls einfach ableitbare Polynome in ρ und t eingesetzt werden, bildet diese Projektion wegen des Faktors $\sin \delta$ keine Polarlinie aus. Dennoch ist es nicht unmöglich, Polarlinien zu erzeugen. In Formel (24) wurde ein weniger triviales Halbmessergesetz empfohlen, das bei pseudokonischen Entwürfen oft zu Verbesserungen führt. Daneben sei:

$$s = s_1 - s_1 \cos \delta + s_2 (\sin \delta - \delta \cos \delta) + \dots \quad (32)$$

Nach Einsetzen der Formeln (23), (24) und (32) in die Formel (30) wird $\sin \delta$ aufgelöst:

$$(\rho_1 + \rho_2 \delta + \dots) \vartheta - \rho (s_1 + s_2 \delta + \dots) \sin \vartheta = \lambda \quad (33)$$

wobei ρ gleich ist wie in Formel (24). Diese Abbildung kann immer noch einen Polarpunkt haben, vorausgesetzt, dass der Halbmesser des Nordpols null wird. Im Abschnitt 4 kann überprüft werden, dass diese komplizierteren Gleichungen in den

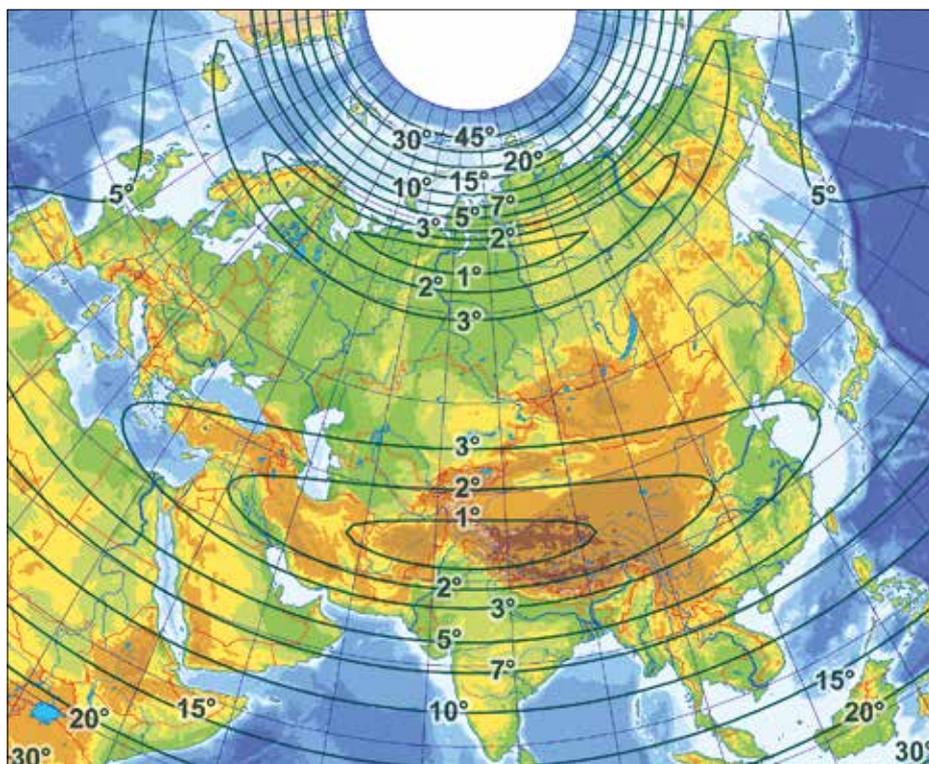


Abb. 5: Pseudokonische Abbildung für Eurasien mit Polen als Linie

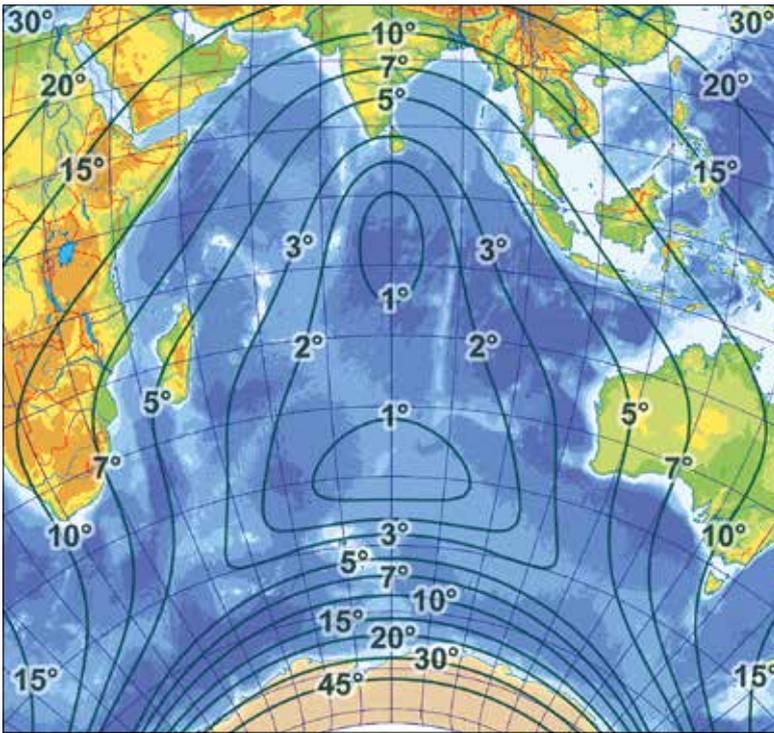


Abb. 7: Der Indische Ozean im flächentreuen Kegelentwurf geringster Winkelverzerrung

- T-förmig: z. B. Nordamerika (nur Grönland, Kanada, die Vereinigten Staaten und Mexiko)
- neben einem Parallelkreis liegend: z. B. Russland
- neben einem Parallelkreis liegend, aber mit größter Weite: z. B. die ehemalige Sowjetunion
- Ost-West-orientiertes Oval: z. B. Eurasien (ohne Indonesien)
- Nordöstlich liegendes Oval: z. B. der Indische Ozean.

Jeweils ein Vorschlag wird durch Fettdruck in der Tabelle betont. Es ist dabei nicht immer erforderlich, die „beste“ Abbildung anzuwenden. Ist ein einfacher Entwurf nicht deutlich nachteiliger als eine komplizierte Abbildung, dann hat er Priorität.

Leider fehlt es noch an einer Lösung, um für alle vorkommenden Gebietsformen die Eigenschaften der vorteilhaftesten Abbildungen mathematisch abzuleiten. Daher müssen Schlussfolgerungen aus vorliegenden Erfahrungen gezogen werden.

Die vorgestellten Projektionen sind empfehlenswert, wo Flächentreue notwendig ist. Es gibt aber viele bessere aphyllaktische unechte Kegelabbildungen, die noch rechtwinklig sind (Györfly, Klinghammer 2004). Flächentreue Kegelentwürfe sind im Allgemeinen unvorteilhaft für annähernd kreisförmige Gebiete (z. B. bildet sich Europa besser in einer schiefachsigen azimutalen Abbildung ab).

Flächentreue polykonische Entwürfe haben stets bessere Alternativen (Tab. 1), aber falls die Ausdehnung in Ost-West gering ist (z. B. die EU oder Nordamerika), können diese geeignet sein. Die echte Kegelabbil-

meisten Fällen besser als die einfachen Polynome ohne Polarlinie sind. Siehe auch Abb. 7!

Vergleich der besten Abbildungen

In Tab. 1 kann das Verzerrungsmaß der vorteilhaftesten Abbildungen (Kriterium von Airy-Kawraiski, Variationstyp) für verschiedene Gebiete verglichen werden. Die Gebietskonturen wurden aus einer heruntergeladenen ESRI-Shape-Datei erstellt. Symmetrie ist stets das wichtigste Erfordernis, deshalb wurde der Mittelmeridian nie optimiert, sondern im Programm festgeschrie-

ben. *Die schiefe Lambert-Projektion in der Tabelle ist kein Kegelentwurf, sondern azimutal!* Diese ist in der Tabelle nur zum Vergleich eingefügt, weil sie die beste flächentreue Abbildung für jeden Kreis auf der Erde darstellt.

Verschiedene Beispielgebiete wurden ausgewählt, da Präferenz für einen Entwurf vor allem von der Gebietsform abhängt. Die ausgewählten Gebiete repräsentieren folgende geometrische Grundformen:

- neben einem Meridian liegend: z. B. Europäische Union (mit Zypern)
- nahezu kreisförmig: z. B. Europa (bis Ural)

Tabelle 1: Verzerrungsmaße der besten Kegelentwürfe

Polarlinien	Gebiet	EU	Europa	Nordamerika	Russland	Ehem. SU	Eurasien	Indischer Ozean
	Mittelmeridian	10°	25°	-100°	95°	85°	75°	80°
0	Pseudokonisch	0,0131	0,0206	0,0298	0,0221	0,0270	0,0616	0,0941
	Polykonisch	0,0102	0,0292	0,0461	0,0925	0,1040	0,1390	0,1053
	Pseudopolykonisch	0,0068	0,0155	0,0273	0,0195	0,0250	0,0578	0,0751
1	Echt	0,0332	0,0337	0,0727	0,0235	0,0331	0,0875	0,2056
	Pseudokonisch	0,0185	0,0235	0,0429	0,0213	0,0292	0,0685	0,1360
	Pseudopolykonisch	0,0055	0,0140	0,0293	0,0198	0,0276	0,0615	0,0845
2	Echt	0,0151	0,0262	0,0589	0,0140	0,0190	0,0610	0,1129
	Pseudokonisch	0,0136	0,0215	0,0421	0,0137	0,0185	0,0563	0,1067
	Pseudopolykonisch	0,0055	0,0139	0,0264	0,0132	0,0172	0,0481	0,0678
<i>Schiefe Lambert-Projektion</i>		<i>0,0077</i>	<i>0,0135</i>	<i>0,0308</i>	<i>0,0266</i>	<i>0,0323</i>	<i>0,0596</i>	<i>0,0747</i>

dung (von Albers) ist auch nicht immer am besten; sehr komplizierte unechte Projektionen verhalten sich kaum besser, wenn die Ost-West-Ausdehnung wesentlich größer als die in Nord-Süd-Richtung ist. Deshalb wird der echte Kegeltentwurf in der Tab. 1. manchmal unechten Abbildungen vorgezogen.

In der Tabelle wird erkenntlich, dass die Abbildungen aus der Halbmessergesetzformel (22) (ohne Polarlinien) oft der Variante aus Formel (24) unterlegen sind. Ausnahme ist Nordamerika, weil es ungefähr in beiden Hauptrichtungen gleich groß ist. Nordamerika hat jedoch keine Kreisform, sondern eine „T“-Form. Deshalb beschreiben die verzerrungslosen Linien des Bonne’schen Entwurfs (Mittelmeridian und ein beliebiger Parallelkreis) diese Formen gut. Ähnliche Projektionen liefern also ähnlich gute Resultate.

Die Koeffizienten einiger optimierter Abbildungen befinden sich im Anhang. Wird aber ein anderes Gebiet dargestellt, muss die beschriebene Berechnung neu durchgeführt werden.

Schlussfolgerungen

Wenn die vorteilhafteste Abbildung für ein unregelmäßig geformtes Gebiet gesucht ist, muss das Gebiet nicht zwingend über eine regelmäßige Fläche genähert werden. Es ist dabei eine sehr wirksame Alternatividee, Oberflächenintegrale mittels der Simpson-Regel zu errechnen. Doch um die Abbildungsgleichungen numerisch (z. B. mit dem Downhill-Simplex-Verfahren) anzunähern, müssen Näherungspolynome verwendet werden. Diese Polynome sollen umsichtig eingesetzt werden, weil sie die Ergebnisse stark beeinflussen. Es ist daher sinnvoll, Polynome in mehreren Varianten zu testen. Das dargestellte Verfahren ist auch für ein Rotationsellipsoid nutzbar, aber in diesem Fall sind die Formeln geringfügig zu modifizieren.

Anhang: Tabelle der Abbildungskonstanten

Abbildung	Formeln	λ_0	ρ_0 / π_1	ρ_1 / φ_2	ρ_2	s_1	s_2
Pseudopolykonisch für die EU	(24, 32, 33)	10°	0,8734	0,8734	1,2944	0,6732	-0,1201
Lambert-Projektion für Europa	-	25°	55,626°	-	-	-	-
Pseudokonisch für Nordamerika	(21, 22)	-100°	0,0138	1,0214	-0,0152	-	-
Albers-Projektion für Russland	(17, 18, 19)	95°	56,263°	71,068°	-	-	-
Pseudokonisch für Eurasien	(21, 23, 24)	75°	1,2371	1,2145	0,0904	-	-
Pseudopolykonisch für Ind. Oz.	(24, 32, 33)	80°	2,1014	1,9216	1,5207	1,0665	-0,2910

Literatur

Adams, Oscar S. (1945). *General theory of equivalent projections*. Washington, D. C. Government Printing Office

Airy, George Biddell (1861): "Explanation of a projection by balance of errors for maps applying to a very large extent of the Earth's surface; and comparison of this projection with other projections". In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 22/149, p. 409-421

Bajewa, Je. Ju. (1987): „Kriterii ozenki dostoinstva kartografitscheskich projekzi ispolsujemych dlja sostawlenija kart Mira“. In: *Geodesija i aerofotogrammetrija* 3, 109-112

Bugajewski, Lew M.; Snyder, John P. (1995): *Map Projections: A Reference Manual*. London, Taylor & Francis

Canters, Frank (2001): *Small-scale Map Projection Design*. DOI: 10.4324/9780203472095

Chamberlain, Robert G.; Duquette, William H. (2007): "Some Algorithms for Polygons on a Sphere". In: *Association of American Geographers Annual Meeting, San Francisco, California, 2007*. Pasadena, CA: Jet Propulsion Laboratory, National Aeronautics and Space Administration. URL: <http://hdl.handle.net/2014/41271>

Dyer, John A.; Snyder, John P. (1989): "Minimum-Error Equal-Area Map Projections". In: *The American Cartographer* 16/1, p. 39-46. DOI: 10.1559/152304089783875613

Frančula, Nedjeljko (1971): *Die vorteilhaftesten Abbildungen in der Atlaskartographie*. Inaugural-Dissertation. Hohe Landwirtschaftliche Fakultät, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn

Györfy, János (1990): „Anmerkungen zur Frage der besten echten Zylinderabbildungen“. In: *Kartographische Nachrichten* 40/4, S. 140-146

Györfy, János; Klinghammer, István (2004): „Die kleinmaßstäbige Darstellung von Europa in Projektionen geringster Verzerrung – die Basis für einen Europa-Atlas“. In: *Kartographische Nachrichten* 54/6, S. 262-268

Haines, G. V. (1981): "The Modified Polyconic Projection". In: *Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization* 18/1, p. 49-58. DOI: 10.3138/c08n-2640-5q26-t20w

Kawraiski, Wladimir W. (1934): *Matematitscheskaja Kartografija*. Redbaza Goskartotresta, M.-L.

Kimerling, Jon A.; Overton, Scott W.; White, Denis (1995): "Statistical Comparison of Map Projection Distortions Within Irregular Areas". In: *Cartography and Geographic Information Science* 22/3, p. 205-221. DOI: 10.1559/152304095782540348

Meschtscherjakow, German A. (1968): *Teoretitscheskie osnovy matematitscheskoi kartografii*. Nedra, Moskau

Nelder, John A.; Mead, Robert (1965): "A Simplex Method for Function Minimization". In: *The Computer Journal* 7/4 p. 308-13. DOI: 10.1093/comjnl/7.4.308

Press, William H. et al. (2002): *Numerical Recipes*. In: *The Art of Scientific Computing*, 2nd ed. Cambridge University Press

Tissot, Auguste (1878): „Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques“. In: *Nouvelles annales de mathématiques, journal des candidats aux écoles polytechnique et normale* 17, 145-163

Tschebyschow, Pafnuti L. (1856): „Sur la construction des cartes géographiques“. In: *Bulletin de la classe physiq.-math de l'Acad. des Sciences*. St. Petersburg. 14, 257-261

Tutić, Dražen (2009): „Optimalne konformne polinomne projekcije za Hrvatsku po Airy/Jordanovom kriteriju“. In: *Kartografija i geoinformacije* 8/11, 49-67. (auf Kroatisch und Englisch)

Wagner, Karlheinz (1949): *Kartographische Netzentwürfe*. Leipzig, Bibliographisches Institut

Über den Autor

Kerkovits, Krisztián ist Doktorand an der Eötvös Loránd Universität, Institut für Kartographie und Geoinformatik in Budapest, Ungarn. Er interessiert sich für Abbildungslehre.

E-Mail: kerkovits@map.elte.hu

Adresse: Eötvös Loránd Tudományegyetem, Térkép-tudományi és Geoinformatikai Tanszék; H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A.

Manuskript eingereicht am 12.10.2016
Angenommen nach Begutachtung am 10.5.2017